



Universidad de Cuenca

UNIVERSIDAD DE CUENCA



FACULTAD DE INGENIERÍA ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL

ANÁLISIS NO LINEAL DE PANDEO EN COLUMNAS ESBELTAS DE HORMIGÓN MEDIANTE LA OBTENCIÓN DE ESFUERZOS INTERNOS

TESIS PREVIA A LA OBTENCIÓN
DEL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

AUTORES:

JUAN SEBASTIÁN ALVAREZ RUILOVA.

GEOVANNY PATRICIO ARGUDO SÁNCHEZ.

DIRECTOR:

INGENIERO JORGE MOSCOSO FERNÁNDEZ SALVADOR M.Sc.

CUENCA-ECUADOR

2014



RESUMEN

El presente proyecto de investigación propone una metodología de análisis estático no lineal, aplicado a la comprobación de columnas rectangulares esbeltas de hormigón armado y de acero rellenas de hormigón, que tuvo como objetivo principal calcular la directriz geométrica y mecánica de una columna esbelta, para así determinar el máximo momento de la demanda que puede resistir la columna para una carga axial dada, ya sea, por agotamiento o inestabilidad. El método consiste en un proceso iterativo, en el que se varía la profundidad de la fibra neutra y el radio de curvatura para obtener la directriz mecánica; la directriz geométrica se obtuvo mediante una distribución senoidal de la curvatura. Una vez obtenidas ambas directrices, se localiza el punto de tangencia entre ellas, punto que representa la máxima excentricidad incluyendo los efectos de segundo orden que puede resistir una columna para una carga axial dada. Para la aplicación de la metodología se desarrollaron programas en MATLAB. Con los resultados obtenidos de los programas se logró validar el método, comparando estos resultados, con los resultados obtenidos de los mismos ejemplos mediante la aplicación del código ACI318-11 y AISC 360-10. El método es versátil, ya que, puede ser empleado para analizar columnas constituidas por diferentes tipos de materiales incorporando sus diagramas esfuerzo-deformación; es óptimo, ya que, permite comprobar si una columna esbelta resiste cierta combinación de carga, sin necesidad de construir el diagrama de interacción, además, permite conocer el estado tensional de la sección crítica en el punto de falla.

Palabras Clave: Columna esbelta, pandeo, inestabilidad, agotamiento, directriz mecánica, directriz geométrica, radio de curvatura, fibra neutra, esfuerzo, deformación.



ABSTRACT

In this thesis, a static nonlinear method is proposed for analyzing slender, rectangular reinforced concrete columns and concrete filled steel columns. The main objective is to compute the geometric and the mechanical directrix of a slender column in order to determine the maximum permissible moment for a given axial load. The method proposed is based on an iterative process, in which the neutral fiber depth and the radius of curvature are adjusted to obtain the mechanical directrix; the geometric directrix is determined through a sinusoidal distribution of the curvature. Once both directrices are obtained, the tangency point between them is determined, which represents the maximum eccentricity that the column can resist for a given axial load, including the second order effects. For the implementation of the methodology proposed, programs on MATLAB. With the results obtained from these programs, the method was validated through comparison with results obtained from the same examples through the ACI 318-11 code and AISC 360-10 code. A clear attribute of the method proposed is its versatility, which can be evidenced by the fact that it can be applied to the analysis of columns consisting of different types of materials, being necessary to incorporate the respective stress-strain diagrams. In addition, the method allows the verification of the stability of a column for a given load combination without obtaining the iteration diagram, as well as the stress of the critical section on the point of failure, therefore proving to be optimal when compared to traditional iterative diagram methods.

Keywords: Slender column, buckling, instability, fatigue, mechanical directrix, geometric directrix, radius of curvature, neutral fiber, stress, strain.



Contenido

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN	15
1.1 ANTECEDENTES	15
1.2 OBJETIVO GENERAL	16
1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	16
1.4 JUSTIFICACIÓN	17
CAPÍTULO 2 MARCO TEÓRICO	18
2.1 GENERALIDADES	18
2.2 MATERIALES	21
2.2.1 Hormigón	21
2.2.2 Acero estructural	23
2.3 DIRECTRIZ MECÁNICA Y DIRECTRIZ GEOMÉTRICA	25
2.3.1 Directriz Mecánica	25
2.3.2 Directriz Geométrica	29
2.4 OBTENCIÓN DE LA CARGA CRÍTICA DEBIDO A LA INESTABILIDAD DE UNA COLUMNA ESBELTA SEGÚN EL COGIDO ACI318-11 Y AISC360-10	33
2.4.1 Obtención de la carga crítica según el código ACI318-11	33
2.4.2 Obtención de la carga crítica según el código AISC360-10	36
CAPÍTULO 3 METODOLOGÍA	41
3.1 CONSIDERACIONES E HIPÓTESIS	41
3.2 DEDUCCIONES Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	42
3.3 OBTENCIÓN DE LOS ESFUERZOS INTERNOS	43
3.4 OBTENCIÓN DE LA DIRECTRIZ GEOMÉTRICA Y MECÁNICA DE LA COLUMNA	50
3.5 OBTENCIÓN DEL DIAGRAMA DE INTERACCIÓN	52
CAPÍTULO 4 IMPLEMENTACIÓN DE LOS ALGORITMOS	54
4.1 INGRESO DE DATOS Y PROGRAMACIÓN EN MATLAB	54
4.1.1 Diagramas de Flujo para columnas de hormigón armado	54
4.1.2 Diagramas de Flujo para columnas de acero rellenas de hormigón	57
CAPÍTULO 5 EJEMPLOS RESUELTOS	62
5.1 COLUMNA DE HORMIGÓN ARMADO SEGÚN EL CÓDIGO ACI318-11	62
5.2 COLUMNA DE HORMIGÓN ARMADO SEGÚN LA METODOLOGÍA PROPUESTA	65
5.3 COLUMNA DE ACERO RELLENA DE HORMIGÓN SEGÚN EL CÓDIGO AISC360-10	71
5.4 COLUMNA DE ACERO RELLENA DE HORMIGÓN SEGÚN LA METODOLOGÍA PROPUESTA	74
CAPÍTULO 6 VALIDACIÓN Y RESULTADOS	81
6.1 VALIDACIÓN Y OBTENCIÓN DE ERRORES PARA EL DIAGRAMA DE INTERACCIÓN POR AGOTAMIENTO	81
6.2 VALIDACIÓN Y OBTENCIÓN DE ERRORES PARA EL DIAGRAMA DE INTERACCIÓN POR INESTABILIDAD	85
CAPÍTULO 7 CONCLUSIONES	88



CAPÍTULO 8 BIBLIOGRAFÍA.....	91
CAPÍTULO 9 ANEXOS	92
Anexo 1.Tabla de distribuciones de curvaturas.....	93
Anexo 2.Tabla de inercias y módulos de elasticidad para el hormigón.....	94
Anexo 3.Clasificación de la sección según su esbeltez para pandeo local a compresión	94
Anexo 4.Distribución Plástica esfuerzo en secciones de acero rellenas de hormigón según el pandeo local.....	95
Anexo 5.Codificación en Matlab	96



ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1.- Esquema de una columna esbelta con carga excéntrica [5].	19
Figura 2.2.- Tipos de rotura para soportes cortos y esbeltos [4].	21
Figura 2.3.- Diagrama esfuerzo-deformación parábola-rectángulo para el hormigón a compresión [10]	22
Figura 2.4.- Curvas esfuerzo-deformación ($f'_c=210 \text{ kg/cm}^2$) según ASTM. Variación por velocidad de aplicación de cargas [12].	23
Figura 2.5.- Diagrama esfuerzo-deformación bilineal del acero	24
Figura 2.6.- Estado deformacional y tensional de una sección genérica	27
Figura 2.7.- Directriz mecánica de una sección.	27
Figura 2.8.- Diagrama de pivotes [5]	28
Figura 2.9.- Método de la columna modelo para la excentricidad equivalente	30
Figura 2.10.- Deducción de la excentricidad de segundo orden con distribución de curvatura senoidal	31
Figura 2.11.- Directriz geométrica: Criterio de Timoshenko	32
Figura 2.12.- Directriz Geométrica	33
Figura 2.13.- Diagrama de clasificación de columnas según su esbeltez [7]	36
Figura 3.1.-Caso 1 de distribución de esfuerzos del hormigón	45
Figura 3.2 -Caso 2 de distribución de esfuerzos del hormigón	45
Figura 3.3.- Caso 3 de distribución de esfuerzos del hormigón	46
Figura 3.4.-Caso 1 de distribución de esfuerzos del acero	47
Figura 3.5.- Caso 2 de distribución de esfuerzos del acero	48
Figura 3.6.- Caso 3 de distribución de esfuerzos del acero	49
Figura 3.7.- Caso 4 de distribución de esfuerzos del acero	49
Figura 3.8.- Caso 5 de distribución de esfuerzos del acero	50
Figura 3.9 Directriz mecánica de una columna (metodología propuesta)	51
Figura 3.10.- Directriz geométrica de una columna (metodología propuesta)	52
Figura 3.11.- Construcción de un diagrama de interacción a partir del diagrama momento-curvatura [20]	53
Figura 3.12.-Efecto de la esbeltez geométrica en el comportamiento de columnas esbeltas [4]	53
Figura 5.1.- Sección transversal de la columna de hormigón armado	63
Figura 5.2.- Diagrama de Interacción columna de hormigón sin considerar efectos de esbeltez (Método ACI)	64
Figura 5.3.- Diagrama de interacción por inestabilidad según el código ACI 318 11	65
Figura 5.4.- Diagrama de interacción por agotamiento obtenido mediante la metodología propuesta (Columna de hormigón)	68
Figura 5.5.- Directriz mecánica vs directriz geométrica para un axil $N= 22970 \text{ kg}$ (Columna de hormigón)	69
Figura 5.6.- Directriz mecánica vs directriz geométrica para un axil $N=70298$ (Columna de hormigón)	69
Figura 5.7.- Directriz mecánica vs directriz geométrica para un axil $N= 104040$ (Columna de hormigón)	70



Figura 5.8.- Directriz mecánica vs directriz geométrica para un axil $N=131784$ (Columna de hormigón).....	70
Figura 5.9.- Directriz mecánica vs directriz geométrica para un axil $N=233250$ (Columna de hormigón).....	70
Figura 5.10.- Diagrama de interacción por inestabilidad según la metodología desarrollada (Columna de hormigón).....	71
Figura 5.11.- Sección transversal de la columna de acero rellena de hormigón.	71
Figura 5.12.- Diagramas de interacción sin considerar efectos de segundo orden (Columna de acero).	73
Figura 5.13.- Diagrama de interacción por inestabilidad según el AISC 360-10 (Columna de acero)	74
Figura 5.14.-Directriz mecánica para un axial $N=49410$ (Columna de acero).....	75
Figura 5.15.- Directriz mecánica para un axial $N=152260$ (Columna de acero)	76
Figura 5.16.- Directriz mecánica para un axial $N=202630$ (Columna de acero)	76
Figura 5.17. Directriz mecánica para un axial $N=265590$ (Columna de acero).....	76
Figura 5.18.- Diagrama de interacción por agotamiento obtenido mediante la metodología propuesta (Columna de acero).....	77
Figura 5.19.- Punto de inestabilidad para $N=1135.7$ kg.....	78
Figura 5.20.- Punto de inestabilidad para $N=13729$ kg.....	78
Figura 5.21.- Punto de inestabilidad para $N=76695$ kg.....	79
Figura 5.22.- Punto de inestabilidad para $N=118670$ kg.....	79
Figura 5.23.- Punto de inestabilidad para $N=160650$ kg.....	79
Figura 5.24.- Diagrama de interacción por inestabilidad según la metodología desarrollada (Columna de acero)	80
Figura 6.1.- Diagrama comparativo de interacción por agotamiento entre el código ACI 318-11 y la metodología propuesta (Columna de hormigón)	82
Figura 6.2.- Diagrama de interacción columna de hormigón (SAP200)	83
Figura 6.3.- Diagrama comparativo de interacción por agotamiento SAP2000 vs Metodología propuesta (Columna de hormigón)	84
Figura 6.4.- Diagrama comparativo de interacción por agotamiento entre el código AISC 360-10 y la metodología propuesta (Columna de acero).	85
Figura 6.5.- Diagrama comparativo de interacción por inestabilidad entre el código ACI 318-11 y la metodología propuesta (Columna de hormigón)	86
Figura 6.6.- Diagrama comparativo de interacción por inestabilidad entre el código AISC 360-10 y la metodología propuesta (Columna de acero).	87
Figura 7.1.-Directriz geométrica y mecánica: rango de equilibrio estable.....	88
Figura 7.2.- Directrices mecánicas para diferentes cargas axiales.....	89
Figura 7.3.- Tipos de distribución de curvaturas.....	90



INDICE DE TABLAS

Tabla 5.1.- Datos de entrada para para la columna de hormigón.	62
Tabla 5.2.- Datos obtenidos con el programa dia_itera.m	63
Tabla 5.3.- Datos usados para la construcción de diagrama de interacción por inestabilidad según el código ACI 318-11	65
Tabla 5.4.- Datos usados para la construcción del diagrama de interacción por agotamiento según la metodología propuesta (Columna de hormigón).....	66
Tabla 5.5.- Datos usados para la construcción del diagrama de interacción por inestabilidad según la metodología propuesta (Columna de hormigón).	68
Tabla 5.6.- Datos de entrada para la columna de acero rellena de hormigón.	72
Tabla 5.7.- Datos obtenidos con el programa interacciona.m	73
Tabla 5.8.- Datos usados para la construcción del diagrama de interacción por inestabilidad según el código AISC 360-10 (Columna de acero)	74
Tabla 5.9.- Datos usados para la construcción del diagrama de interacción por agotamiento según la metodología propuesta (Columna de acero)	75
Tabla 5.10.- Datos usados para la construcción del diagrama de interacción por inestabilidad según la metodología propuesta (Columna de acero).	77
Tabla 6.1.- Error relativo por agotamiento para una columna de hormigón, entre el código ACI 318-11 y la metodología propuesta.	82
Tabla 6.2.- Error relativo por agotamiento para una columna de hormigón, entre SAP 2000 y la metodología propuesta.....	83
Tabla 6.3.- Error relativo por agotamiento para una columna de acero, entre el código AISC 360-10 y la metodología propuesta.....	84
Tabla 6.4.- Error relativo por inestabilidad para una columna de hormigón, entre el código ACI 318-11 y la metodología propuesta.	86
Tabla 6.5.- Error relativo por inestabilidad para una columna de acero, entre el código AISC 360-10 y la metodología propuesta (Columna de acero).	87
Tabla 9.1.- Relaciones ancho-espesor para clasificación de secciones según el pandeo local por compresión	94
Tabla 9.2.- Relaciones ancho-espesor para clasificación de secciones según el pandeo local por flexión	94



Yo, *Juan Sebastián Álvarez Ruilova*, autor de la tesis "ANÁLISIS NO LINEAL DE PANDEO EN COLUMNAS ESBELTAS DE HORMIGÓN MEDIANTE LA OBTENCIÓN DE ESFUERZOS INTERNOS", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor.

Cuenca, 31 de Octubre del 2014

Juan Sebastián Álvarez Ruilova

C.I: 0104279377



Yo, *Geovanny Patricio Argudo Sánchez*, autor de la tesis “ANÁLISIS NO LINEAL DE PANDEO EN COLUMNAS ESBELTAS DE HORMIGÓN MEDIANTE LA OBTENCIÓN DE ESFUERZOS INTERNOS”, certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor.

Cuenca, 31 de Octubre del 2014

Geovanny Patricio Argudo Sánchez

C.I: 0104679667



Yo, *Juan Sebastián Álvarez Ruilova*, autor de la tesis "ANÁLISIS NO LINEAL DE PANDEO EN COLUMNAS ESBELTAS DE HORMIGÓN MEDIANTE LA OBTENCIÓN DE ESFUERZOS INTERNOS", reconozco y acepto el derecho de la Universidad de Cuenca, en base al Art. 5 literal c) de su Reglamento de Propiedad Intelectual, de publicar este trabajo por cualquier medio conocido o por conocer, al ser este requisito para la obtención de mi título de Ingeniero Civil. El uso que la Universidad de Cuenca hiciere de este trabajo, no implicará afección alguna de mis derechos morales o patrimoniales como autor

Cuenca, 31 de Octubre del 2014

Juan Sebastián Álvarez Ruilova

C.I: 0104279377



Yo, *Geovanny Patricio Argudo Sánchez*, autor de la tesis “ANÁLISIS NO LINEAL DE PANDEO EN COLUMNAS ESBELTAS DE HORMIGÓN MEDIANTE LA OBTENCIÓN DE ESFUERZOS INTERNOS”, reconozco y acepto el derecho de la Universidad de Cuenca, en base al Art. 5 literal c) de su Reglamento de Propiedad Intelectual, de publicar este trabajo por cualquier medio conocido o por conocer, al ser este requisito para la obtención de mi título de Ingeniero Civil. El uso que la Universidad de Cuenca hiciere de este trabajo, no implicará afección alguna de mis derechos morales o patrimoniales como autor

Cuenca, 31 de Octubre del 2014

Geovanny Patricio Argudo Sánchez

C.I: 0104679667



DEDICATORIA

A mi Madre Dolorosa que todo el tiempo me guía y me da fuerza para continuar mi camino.

Con especial cariño y agradecimiento a mi abuelito Octavio (†) quien junto a mis padres Edgar y María Elena me han inculcado a lo largo de toda su vida los valores que hoy me definen.

A mis hermanos Xavier y Pedro por apoyarme de manera incondicional en todas las etapas de mi vida.

A mi novia María Cristina quien ha sido mi apoyo y soporte incondicional.

A toda mi familia y amigos, quienes siempre han estado pendientes y me han apoyado a largo de mi vida.

Juan

A Dios y a la Virgen María, gracias a quienes todo esto es posible.

De manera especial me gustaría dedicar esta tesis a mis padres Fernando y Elisa, a mi hermano Diego por su ayuda, consejos, apoyo incondicional y por ser el ejemplo a seguir durante toda mi vida.

A mi abuelita Tarcila por ser la persona que ha creído en mí en todo momento.

A mis tíos Sixto y Gloria por el apoyo en estos años.

A toda mi familia y amigos, quienes estuvieron conmigo y me apoyaron a largo de toda mi carrera.

Geovanny



AGRADECIMIENTO

A nuestros padres por la fuerza, consejos y apoyo en todo momento.

Al culminar esta etapa de aprendizaje en nuestras vidas queremos agradecer de manera especial al Ing. Jorge Moscoso director y amigo, quien nos ha brindado su total apoyo y orientación a lo largo de este proyecto de investigación.

A los ingenieros Jorge Guillen, Juan Carrión, Adrián Tola y Fabián Cabrera por habernos ayudado aclarando nuestras inquietudes en la elaboración de esta tesis.

A todos nuestros profesores que nos han transmitido sus conocimientos durante nuestra carrera universitaria.

Capítulo 1 INTRODUCCIÓN

1.1 Antecedentes

Las columnas, elementos primordiales de los sistemas estructurales, han sido motivo de gran investigación desde hace cientos de años. Se considera a una columna como esbelta, si las dimensiones de su sección transversal son extremadamente pequeñas con respecto a su altura; el grado de esbeltez se expresa generalmente en términos de su relación KL/r_g , donde KL es la

longitud efectiva y r_g es el radio de giro de la sección transversal; si la relación

de una columna sobrepasa un valor *límite* $\left(KL/r_g\right)_{lim}$ definido según el código

de diseño usado, la columna se considera esbelta y su capacidad ultima estará gobernada por su estado límite de inestabilidad (pandeo), es decir, por un desplazamiento lateral brusco del elemento, con el consecuente sobreesfuerzo de su sección [1].

Las columnas esbeltas, son elementos que soportan, principalmente, cargas a compresión, pero también cargas excéntricas en uno o ambos ejes de su sección transversal. La primera persona que intentó resolver el problema del dimensionamiento de una columna esbelta, fue Leonhard Euler en 1744, quien logró demostrar que, mientras mayor sea la longitud de la columna, menor será su capacidad axial, y por supuesto, mayor su inestabilidad lateral; hipótesis que fue validada y aceptada sólo varios años después, y que hoy en día sigue considerándose la base para el estudio de las columnas esbeltas. Mediante el estudio de Euler se estableció una expresión que determina la carga última (concéntrica) que una columna es capaz de resistir, a esta carga se la conoce como carga crítica de pandeo o carga crítica de Euler [2]. Por otro lado, Timoshenko generalizó la ecuación de la carga crítica de Euler al incorporar por primera vez el problema de la inestabilidad de piezas sometidas a una carga excéntrica, lo que implica que, la columna además de la carga axial estará bajo la acción de un momento flector, motivo por el cual, la deformación que sufre una columna bajo una carga excéntrica será mayor a la que sufre bajo una carga concéntrica de igual magnitud [3]. Muchos años después G. Kirchhoff en 1852 amplió el análisis de Euler, al considerar las grandes deformaciones producidas por la curvatura exacta de la pieza deformada; posterior a esto en 1884 Engesser extendió la idea de Euler a columnas cuyo material tiene un comportamiento constitutivo no lineal [2].

La tendencia en la actualidad, debido a la constante evolución de los métodos de cálculo y de los materiales empleados en la construcción -incluyendo hormigones de alta resistencia- hace posible el dimensionamiento de columnas con secciones transversales más pequeñas y longitudes mayores, es decir, columnas más esbeltas debido a las exigencias arquitectónicas y a la reducción de costos por el ahorro del material utilizado. La problemática del dimensionamiento y comprobación de columnas esbeltas, se debe principalmente a las aproximaciones supuestas en los diseños. Existe mucha incertidumbre en la precisión de los cálculos pero con la ayuda de programas

computacionales se pueden hacer análisis mucho más aproximados tomando consideraciones que acercan el diseño más a la realidad.

Los análisis considerados y estudiados en este proyecto de tesis son: no linealidades geométricas y no linealidades de los materiales. La primera no linealidad se debe, a la influencia de las deformaciones sobre los esfuerzos que involucra el uso de la teoría de segundo orden; la segunda corresponde a una no linealidad física, propia del material que se traduce en diagramas momento-curvatura no lineales [4]. Debido a estas dos no linealidades, el estudio de columnas esbeltas no puede realizarse en partes independientes (análisis de esfuerzos y dimensionamiento), como sucede cuando se realiza un análisis lineal sin considerar efectos de segundo orden. Para tomar en cuenta el efecto de estas dos no linealidades en el cálculo de esfuerzos, se debe disponer de la geometría de la sección, cuantía y disposición de las armaduras (columnas de hormigón armado) o espesor de perfil (columnas de acero rellenas de hormigón), ya que, el diagrama momento curvatura varía en función de estos valores.

En esta tesis se desarrolló un algoritmo el cual presenta una solución gráfica, que se basa en la construcción de la directriz geométrica y mecánica de una columna esbelta, ya diseñada; en la cual se analiza el punto de tangencia entre ambas directrices, es decir, el punto de falla, ya sea por inestabilidad o agotamiento. El algoritmo fue desarrollado para columnas rectangulares de hormigón armado y columnas acero rellenas de hormigón.

Este proyecto de tesis aspira demostrar la validez de la metodología usada, al comparar los resultados de carga axial y momento máximo obtenidos mediante el algoritmo desarrollado, con los resultados que se obtienen mediante el código de diseño, aplicado según corresponda.

1.2 Objetivo general

Desarrollar una metodología de análisis no lineal para columnas esbeltas que compruebe su dimensionamiento mediante el cálculo de sus esfuerzos internos tanto para columnas de hormigón armado como de acero rellenas de hormigón.

1.3 Objetivos específicos

- Desarrollar una metodología para el análisis no lineal de columnas esbeltas considerando la no linealidad geométrica y a la no linealidad de los materiales.
- Validar la metodología propuesta al comparar los resultados obtenidos, con los métodos de dimensionamiento de columnas esbeltas de los códigos ACI318-11 para columnas de hormigón armado y AISC360-10 para columnas de acero rellenas de hormigón.
- Generar un algoritmo para realizar el análisis de inestabilidad (pandeo) de columnas esbeltas.



- Calcular punto a punto los diagramas de la directriz mecánica y geométrica para cada columna analizada.
- Obtener el diagrama de interacción de cada columna esbelta analizada.

1.4 Justificación

“El problema de la comprobación de las piezas esbeltas es complejo al ser, fundamentalmente, un problema no lineal” [5]; debido a que las columnas son elementos indispensables en cualquier sistema estructural, se tiene la necesidad de desarrollar una metodología, que de una manera simple y eficaz, facilite la comprobación del dimensionamiento, de una columna esbelta de hormigón armado o de acero rellena de hormigón. Razón por la cual se desarrolló un algoritmo, que mediante la construcción de soluciones gráficas se podrá comprobar si una columna esbelta resistirá o no, las cargas para las que fue diseñada.

Capítulo 2 MARCO TEÓRICO

2.1 Generalidades

El diseño o comprobación de columnas esbeltas, para columnas cargadas concéntricamente se basa en la fórmula dada por Euler para encontrar la carga crítica de pandeo, la cual está dada en la ecuación Ec [2.1.1] [1].

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \quad \text{Ec [2.1.1]}$$

Donde:

$E \rightarrow$ Módulo de elasticidad del material.

$I \rightarrow$ Momento de inercia de la sección transversal.

$KL \rightarrow$ Longitud efectiva de la columna.

La mayor parte elementos que están sometidos a compresión también se encuentran sujetos a una flexión simultánea, es decir, un momento flector, el cual está dado por la aplicación de una carga excéntrica a la columna (Ec [2.1.2]), momento al que se lo conoce como momento de primer orden (M_1) [3].

$$M_1 = N_u \cdot e_0 \quad \text{Ec [2.1.2]}$$

En el estudio de columnas esbeltas cargadas excéntricamente, es indispensable el considerar las deformaciones adicionales que se producen en la columna, ya que, al usar un análisis de segundo orden, estas deformaciones aportaran un momento adicional a la columna, que será igual a N_U veces su brazo de palanca Δ [5], como se observa en la Figura 2.1, de esta manera la demanda total de momento vendrá dada por la ecuación Ec [2.1.3].

$$M_U = N_U \cdot (e_0 + \Delta) \quad \text{Ec [2.1.3]}$$

Donde:

$N_u \rightarrow$ Carga axial aplicada en la columna.

$e_0 \rightarrow$ Distancia con respecto al centro de la sección a la cual se le aplica la carga N_u .

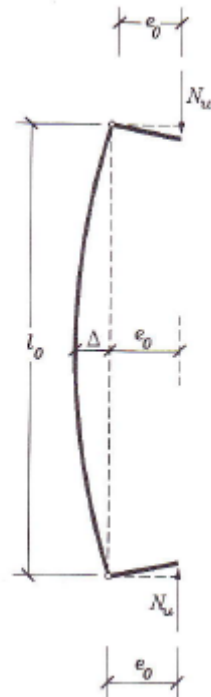


Figura 2.1.- Esquema de una columna esbelta con carga excéntrica [5].

Se usó el método de la longitud efectiva de pandeo (kL) que es la distancia entre los puntos de inflexión de una columna según el tipo de apoyo en sus extremos [6]; el valor de la longitud efectiva depende, tanto de la resistencia al desplazamiento lateral, como del grado de impedimento para que pueda rotar debido al tipo de apoyo en los extremos de la columna. La longitud efectiva Ec [2.1.4] brinda una simplificación en el análisis, ya que, reemplaza la longitud real de una columna con cualquier tipo de restricción en sus extremos, por una columna con longitud ficticia equivalente a la real, simplemente apoyada en su extremo y con un apoyo deslizante en el otro [1].

$$L_e = K \cdot L \quad \text{Ec [2.1.4]}$$

Donde:

L = Longitud real de columna.

K = Coeficiente que multiplica a la longitud real de la columna para obtener la longitud efectiva.

Los valores de K varían según el tipo de estructura, sistema estructural y grados de libertad que tenga la columna en sus extremos, por ejemplo, para marcos arriostrados el valor de K debe ser menor que 1, pero para marcos no arriostrados K deberá ser siempre mayor que 1 debido al pandeo [7]. En el desarrollo de esta tesis se realiza el análisis de columnas aisladas por lo que el coeficiente K será un dato conocido.

Como señalan Murcia Vela, Aguado de Cea y Marí Bernat [8], en un análisis general o riguroso de estructuras, se debe intentar eliminar algunas simplificaciones, por lo que en el planteamiento del análisis de este estudio siempre se debe satisfacer las siguientes condiciones:

1. Condiciones de equilibrio.- Se debe cumplir el equilibrio tanto a nivel de elemento como de sección. A nivel de elemento los esfuerzos internos y externos deben ser iguales, entre reacciones y cargas, y a nivel de sección entre esfuerzos y deformaciones.
2. Condiciones de compatibilidad.- Se debe cumplir la compatibilidad tanto a nivel de elemento como de sección. A nivel de elemento debe existir una compatibilidad, entre la curvatura de la columna, con la derivada segunda de la deformada; a nivel de sección, la deformación que tenga el acero será la misma que la que tenga el hormigón en contacto.
3. Condiciones del material.- Se deberá considerar los fenómenos no lineales que tenga cada uno de los materiales, en base a sus ecuaciones constitutivas.

Para elementos comprimidos es necesario el uso de un análisis de segundo orden, puesto que, un análisis de primer orden no considera las deformaciones transversales que son producidas por la aplicación de cargas en la columna, lo que con lleva un error, ya que, no se consideran los esfuerzos suplementarios que se generan en la columna, los que son considerados en un análisis de segundo orden [4]. Existen varios análisis de segundo orden para columnas esbeltas, los cuales han servido de base teórica para el análisis propuesto en esta tesis, algunos de ellos son: Método de los coeficientes de mayoración [9], método de las curvaturas de referencia [4], método de la columna modelo [10], [3], entre otros.

Para una columna con cargas excéntricas en sus extremos, el tipo de falla que esta tendrá dependerá de su grado de esbeltez. Para columnas con esbelteces bajas la falla se da por agotamiento de la sección crítica de la pieza, es decir, la sección más solicitada a lo largo de la columna; ya que, para esbelteces bajas las deformaciones transversales de la columna se consideran prácticamente nulas; por otro lado, cuando el grado de esbeltez de una columna es alto, el fallo de la columna ocurrirá por inestabilidad (pandeo), ya que, las deformaciones de las secciones alcanzan grandes valores cuando la fuerza aplicada en la columna se incrementa, con lo que se llega a un punto en el que las fuerzas internas son incapaces de equilibrar las demandas externas y la pieza falla antes de haber alcanzado los esfuerzos característicos de rotura [4], [5].

En la Figura 2.2 se presentan los tipos de falla descritos para columnas con cargas excéntricas, donde: el caso 1 representa un fallo por agotamiento para columnas cortas, el caso 2 se da en columnas de esbelteces medias que fallan por agotamiento, y el caso 3 ocurre en secciones esbeltas donde el fallo se da por inestabilidad.

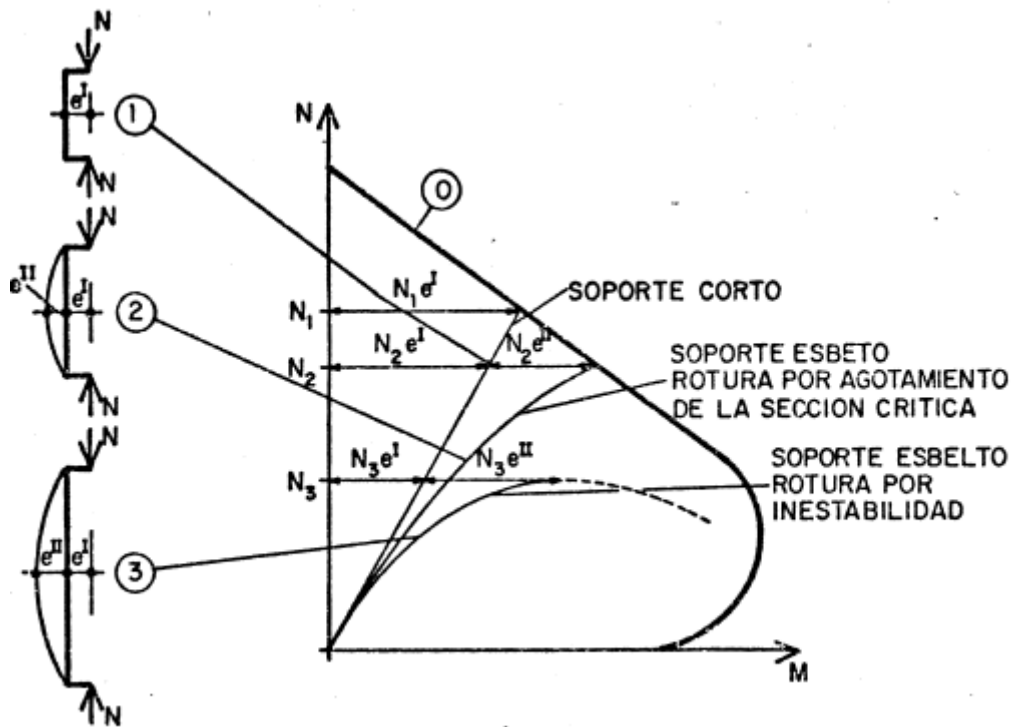


Figura 2.2.- Tipos de rotura para soportes cortos y esbeltos [4].

Para todos los casos de falla el aporte a tracción del hormigón se considera nulo, ya que, se está comprobando la resistencia de la sección, más no las condiciones de servicio de la misma [2].

2.2 Materiales

2.2.1 Hormigón.

La resistencia característica del hormigón a los 28 días (f'_c), se obtiene mediante ensayos en laboratorio de probetas cilíndricas estandarizadas con una relación altura-diámetro de 2 a 1 según normas (ASTM C192) [11]; las probetas son sometidas a carga uniaxial, y la resistencia que se obtiene de cada probeta dependerá de la velocidad y rapidez de aplicación de las cargas.

Para el hormigón en compresión se usó un diagrama esfuerzo-deformación parábola-rectángulo propuesto por el Eurocódigo 2 [10] [Figura 2.3].

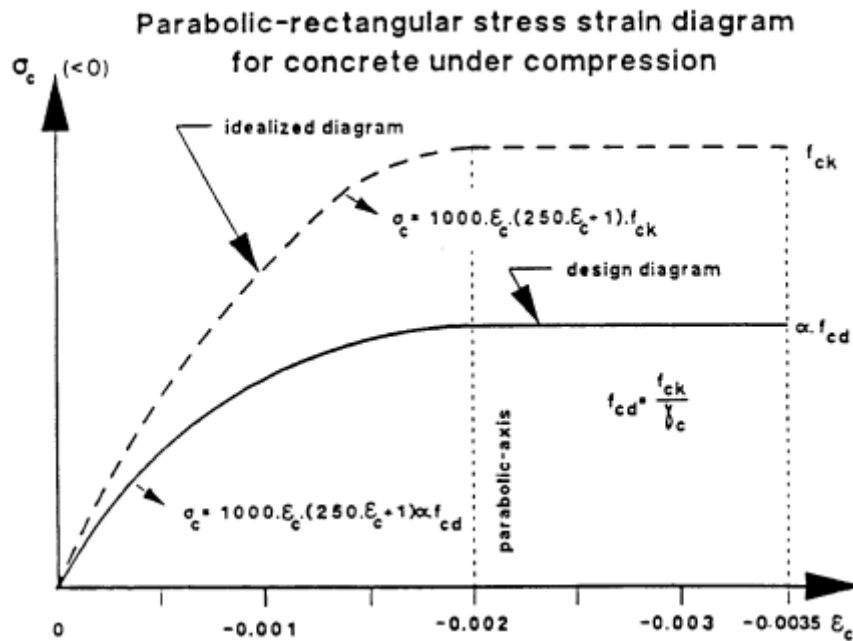


Figura 2.3.- Diagrama esfuerzo-deformación parábola-rectángulo para el hormigón a compresión [10]

Como indica la Figura 2.3 la deformación límite de rotura del hormigón (ϵ_{cu}) es de 0.0035 y la deformación de transición de parábola a rectángulo es de 0.002.

Se usará el diagrama idealizado [Figura 2.3] donde la resistencia característica del hormigón a los 28 días (f_{ck}) se ve afectada por el coeficiente α , obteniéndose el esfuerzo límite de rotura reducido que se muestra en Ec [2.2.1]

$$\sigma_{uc} = \alpha f_{ck} \quad \text{Ec [2.2.1]}$$

Dónde: $\alpha = 0.85$

Las ecuaciones constitutivas del diagrama esfuerzo-deformación del hormigón se muestran en Ec [2.2.2].

$$\begin{aligned} \sigma_1(\epsilon) &= 1000\epsilon(1 - 250\epsilon)\sigma_{uc} \quad \rightarrow 0 \leq \epsilon \leq 0.002 \\ \sigma_2(\epsilon) &= \sigma_{uc} \quad \rightarrow 0.002 < \epsilon \leq \epsilon_{cu} \end{aligned} \quad \text{Ec [2.2.2]}$$

El valor de α se asume, para tomar en cuenta los efectos de la aplicación de la carga axial a largo plazo y los efectos desfavorables del modo de aplicación de la carga. La resistencia del hormigón, varía según la velocidad y duración de las cargas [Figura 2.4]. La resistencia del hormigón, sometido a cargas lentas durante un largo periodo de tiempo es menor que, la resistencia del mismo hormigón sometido a cargas rápidas durante un corto periodo de tiempo [12]. Según pruebas de carga realizados por Rüschi, se muestra que, para hormigón no confinado una carga de largo plazo representa el 80% de la misma carga en las mismas condiciones, aplicada en corto plazo [13]. Mientras que según

ensayos ASTM, la resistencia ultima del hormigón sometido a carga lenta es aproximadamente el 85% de la resistencia del mismo hormigón, sometido a carga rápida [12].

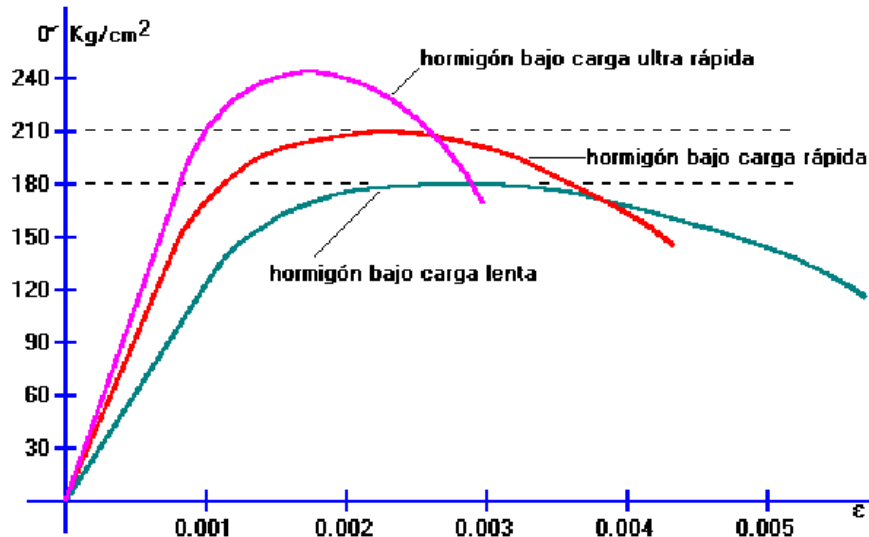


Figura 2.4.- Curvas esfuerzo-deformación ($f'_c=210 \text{ kg/cm}^2$) según ASTM. Variación por velocidad de aplicación de cargas [12].

Para el análisis de columnas de hormigón armado y de columnas de acero rellenas de hormigón, se usó el diagrama parábola-rectángulo, pero, para el hormigón embebido en el perfil de acero se tomó en cuenta el confinamiento, lo que produce que, su deformación límite de rotura sea mayor a la deformación (ϵ_{cu}) de 0.0035 presentada por el diagrama parábola-rectángulo. Por lo que se asumió que la deformación última del hormigón debido al confinamiento será igual a la deformación ultima del acero, garantizando de esta manera que si la columna fallara por agotamiento seria del acero, más no del hormigón.

2.2.2 Acero estructural

Para el caso del acero, se usó el diagrama esfuerzo-deformación bilineal [Figura 2.5] para definir tanto el acero estructural de perfiles como el acero de varillas de refuerzo. El módulo de elasticidad (E_s) del acero, está determinado por la pendiente de la función en el rango elástico del diagrama esfuerzo-deformación.

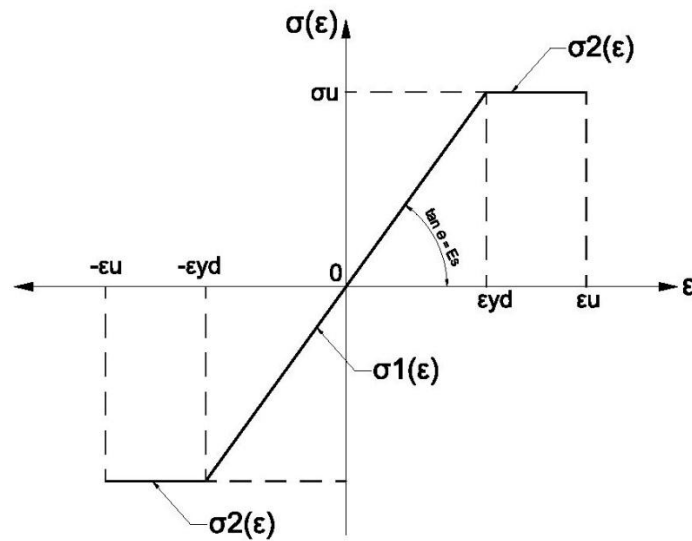


Figura 2.5.- Diagrama esfuerzo-deformación bilineal del acero

El diagrama bilineal está constituido por dos funciones: la primera $[\sigma_1(\varepsilon)]$ proporciona las deformaciones en el rango elástico hasta el punto límite de proporcionalidad elástica (ε_{yd}) , la segunda función $[\sigma_2(\varepsilon)]$ representa las deformaciones plásticas comprendidas entre la deformación (ε_{yd}) y la deformación última del material (ε_u) , que se definió con un valor de 0.01 [10]. El esfuerzo de fluencia (σ_u) , es el esfuerzo máximo del diagrama esfuerzo-deformación, para el cual la tangente de la curva es horizontal [7]. Desde el esfuerzo de fluencia en adelante el material se encuentra en un rango plástico, es decir, se producen incrementos de la deformación sin aumentar el esfuerzo; el esfuerzo último (σ_u) se muestra en Ec [2.2.3].

$$\sigma_u = F_y \quad \text{Ec [2.2.3]}$$

El diagrama bilineal no considera la zona de endurecimiento por deformación luego de la plastificación, ya que, en esta zona se producen grandes deformaciones que son no deseables para el análisis efectuado en esta tesis [7].

Las ecuaciones constitutivas del diagrama esfuerzo-deformación se muestran en Ec [2.2.4].

$$\begin{aligned} \sigma_1(\varepsilon) &= E_s \cdot \varepsilon & \rightarrow -\varepsilon_{yd} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{yd} \\ \sigma_2(\varepsilon) &= \pm \sigma_u & \rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{yd} < \varepsilon \leq \varepsilon_u \\ -\varepsilon_u \leq \varepsilon < -\varepsilon_{yd} \end{cases} \end{aligned} \quad \text{Ec [2.2.4]}$$

El diagrama esfuerzo-deformación del acero varía de acuerdo a la velocidad de aplicación de la carga, el tipo de acero, entre otras. Los aceros usados para

perfiles estructuras en esta tesis son los aceros comerciales en nuestro medio y son:

- Acero ASTM A36: Acero estructural con carbono (0.25-0.29%).
Uso recomendado en edificios, puentes y otras estructuras atornilladas o soldadas [7]. Es el acero más común en nuestro medio

$$F_y = 36 \text{ksi} = 2530 \text{kg/cm}^2$$

$$F_u = 58 \text{ksi} = 4000 \text{kg/cm}^2$$

- Acero ASTM A572 Gr50: Acero de alta resistencia y baja aleación.
Uso recomendado en construcciones soldadas o atornilladas.

$$F_y = 50 \text{ksi} = 3500 \text{kg/cm}^2$$

$$F_u = 65 \text{ksi} = 4582 \text{kg/cm}^2$$

Las varillas de refuerzo para elementos de hormigón armado son corrugadas para restringir su desplazamiento relativo respecto al hormigón. El análisis se realizó con varillas comerciales ASTM A706 cuyo esfuerzo de fluencia es $F_y = 4200 \text{kg/cm}^2$

2.3 Directriz mecánica y directriz geométrica

2.3.1 Directriz Mecánica.

Se define como directriz mecánica de una columna a la curva que relaciona la curvatura con la excentricidad máxima admisible para una fuerza axial y cuantía dadas. Se llama curvatura ($1/r$), a la tangente del ángulo que forma con la vertical el plano que describe el perfil de deformaciones unitarias de una sección, producidas por los esfuerzos normales actuantes sobre ella [14], [4].

Para la obtención tanto de la directriz mecánica, como del diagrama momento curvatura; existen suposiciones básicas ya establecidas que fueron consideradas para el cálculo de cada punto del diagrama, estas se presentan a continuación [1], [13]:

1. Las secciones transversales planas antes de la aplicación de cargas permanecerán planas después de la aplicación de las mismas.
2. Debe haber equilibrio de las fuerzas internas de cualquier sección de la columna, con los efectos de las cargas externas en la misma sección.
3. La deformación del acero será la misma que la del hormigón en contacto, es decir, existirá una adherencia perfecta entre los materiales de manera que no ocurra deslizamiento del uno con respecto al otro.
4. Se desprecia el hormigón a tracción, ya que, su aporte es prácticamente nulo.
5. Se conocen las relaciones esfuerzo-deformación real de los materiales constituyentes, o alguna simplificación razonable relacionada.

El estado deformacional de una sección por la acción de esfuerzos normales (M, N) , estará definido una vez que se conozca la posición del eje neutro (X_n) y la curvatura $(1/r)$. Para cada estado de deformación existirá un par ordenado (M_i, N_i) , que son el resultado de la integración de los esfuerzos internos según las ecuaciones Ec [2.2.5] para columnas de hormigón armado y Ec [2.2.6] para las columnas de acero rellenas de hormigón [4].

$$N_{ci} = \int_0^{x_n} b\sigma_c(x)dx + \sum_{j=1}^m A_{sj}\sigma_{sj} \quad \text{Ec [2.2.5]}$$

$$M_{ci} = \int_0^{x_n} b\sigma_c(x)xdx + \sum_{j=1}^m A_{sj}\sigma_{sj}x_j$$

$$N_{si} = \int_0^{x_n} b\sigma_c(x)dx + \int_0^t 2b\sigma_s(x)dx + \int_t^{h-t} 2t\sigma_s(x)dx \quad \text{Ec [2.2.6]}$$

$$M_{si} = \int_0^{x_n} b\sigma_c(x)xdx + \int_0^t 2b\sigma_s(x)xdx + \int_t^{h-t} 2t\sigma_s(x)xdx$$

Donde:

$m \rightarrow$ Numero de niveles de acero de refuerzo

$\sigma_c \rightarrow$ Esfuerzo del hormigón en el punto (x)

$\sigma_s \rightarrow$ Esfuerzo del acero en el punto (x)

Para la evaluación de la directriz mecánica, se optó por realizar un análisis punto a punto, con lo que se obtiene un diagrama momento-curvatura. Los puntos de la directriz mecánica serán aquellos puntos $(1/r_i, e_i)$ en los que su estado tensional genera un equilibrio entre la fuerza axial interna y la externa [5]

La Figura 2.6 **Error! No se encuentra el origen de la referencia.** representa el estado deformacional y tensional para una sección genérica, cuando la curvatura y el eje neutro tienen valores conocidos de $1/r$ y x_n respectivamente, con lo que se demuestra la compatibilidad de deformaciones entre los materiales.

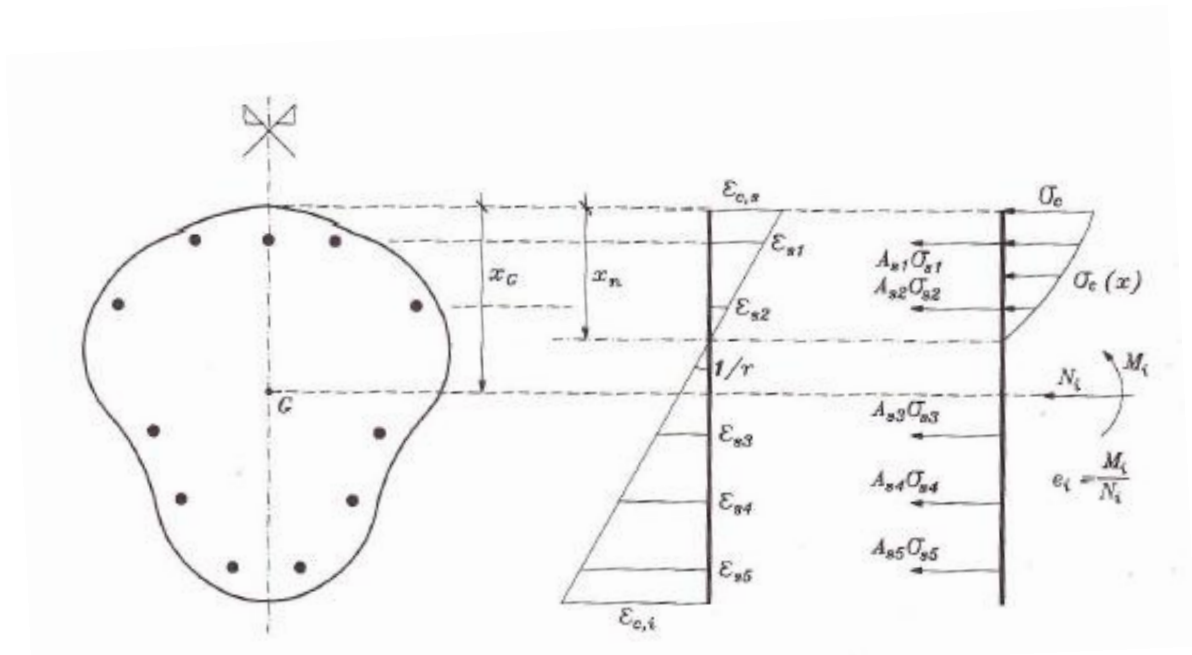


Figura 2.6.- Estado deformacional y tensional de una sección genérica

En la Figura 2.7 se presenta la directriz mecánica para una sección genérica cualquiera de una columna, para una fuerza axial (N) y cuantía (ρ), conocidas y constantes.

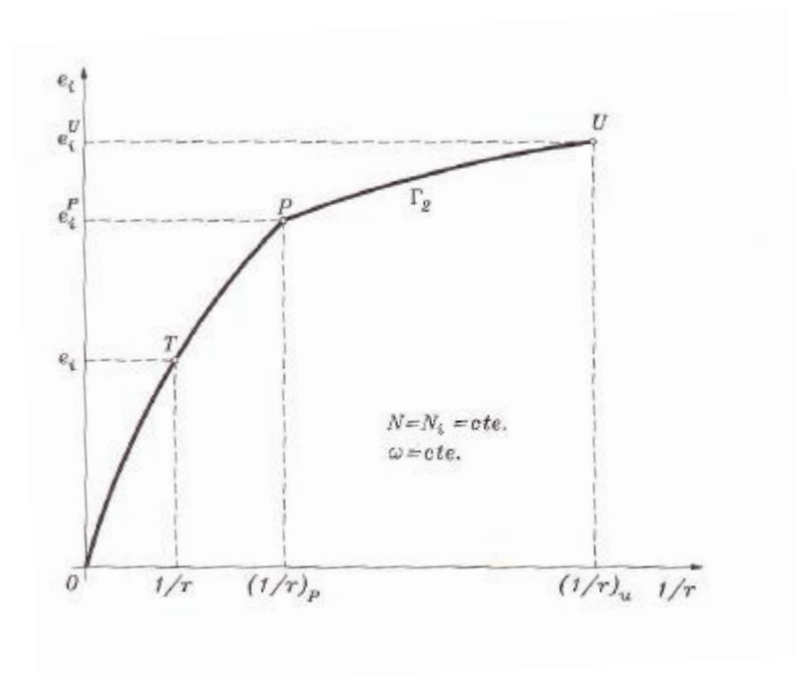


Figura 2.7.- Directriz mecánica de una sección

En la Figura 2.7 se resaltan 3 puntos, que representan:

- T.- Punto en el cual se aprecia la aparición de las primeras grietas en el hormigón, representa cuando el hormigón alcanza su resistencia a tracción, por lo que en muchos casos incluyendo este análisis este punto no se considera [14].
- P.- Punto que representa el inicio de fluencia del acero, este punto es un punto anguloso de la gráfica, y es el punto que define el final del comportamiento elástico de la sección [14].
- U.- Punto final de la directriz mecánica, este punto indica que la sección ha fallado, ya sea porque el acero o el hormigón han alcanzado sus deformaciones máximas admisibles ε_u , que se indican en la Sección 2.2. Este punto representa el estado límite último de agotamiento de la sección [5].

Debido a que, para el cálculo de la directriz mecánica se realiza un análisis punto por punto, es indispensable conocer el punto de máxima curvatura $\left(\frac{1}{r_u}\right)$, este punto será el último punto en el que se analiza la sección, ya que, puntos con curvaturas mayores no se analizarán pues la pieza ya ha fallado. Para encontrar este punto se debe comprobar si la deformación existente en los materiales ha superado a la deformación máxima admisible.

Para el caso de columnas de hormigón se propone un diagrama de pivotes para el cálculo de sus deformaciones máximas, el cual se muestra en la Figura 2.8, con lo que se tiene los siguientes casos [5].

- Para los planos de deformación que se apoyan en el punto A se cumple que $\frac{1}{r} = \frac{0.01}{d - x_n}$
- Para los planos de deformación que se apoyan en el punto B se cumple que $\frac{1}{r} = \frac{0.0035}{x_n}$
- Para los planos de deformación que se apoyan en el punto C se cumple que $\frac{1}{r} = \frac{0.0020}{x_n - 3 \cdot h / 7}$

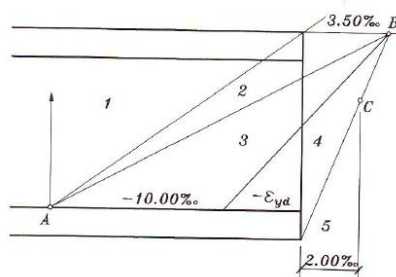


Figura 2.8.- Diagrama de pivotes [5]

Se denomina x_{AB} a la profundidad de fibra neutra del plano de deformación que une los puntos A y B [Figura 2.8], expresión que se presenta en la ecuación Ec [2.2.7]; si $x_{AB} \geq x_n$ el acero será el primer material en superar su deformación máxima correspondiente, caso contrario, si $x_{AB} < x_n$ el hormigón será el primer material en sobrepasar su deformación máxima.

$$x_{AB} = \frac{7}{27} d \quad \text{Ec [2.2.7]}$$

2.3.2 Directriz Geométrica.

La directriz geométrica de una columna, abarca los efectos geométricos a los que está sometida tales como: la deformación debido a la excentricidad de primer orden, los efectos P-delta o deformación por la excentricidad de segundo orden y la excentricidad accidental que incluye las imperfecciones de armado, fabricación y punto de aplicación de la carga sobre la columna.

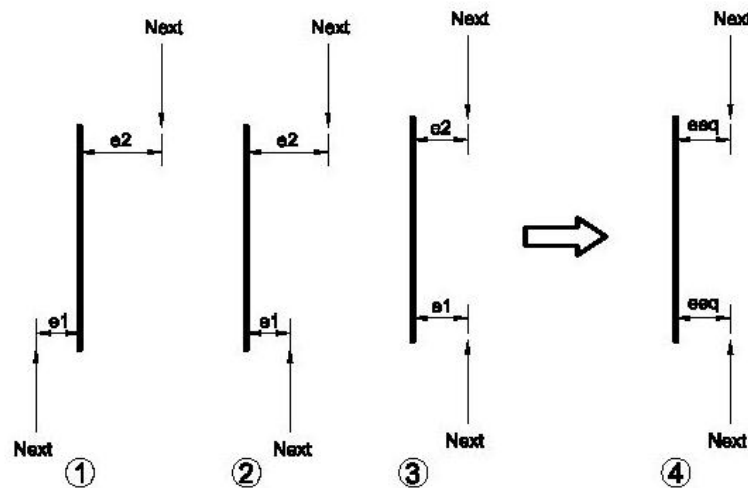
La directriz geométrica, muestra gráficamente la relación lineal entre la curvatura de la sección más crítica de la columna y los efectos geométricos producidos por las deformaciones a nivel elemento.

Al realizar un análisis de segundo orden, se incorporan los esfuerzos producidos por la deformada de la columna, ya que, se suma el momento adicional producido por la deformación de la columna. Este momento adicional varía al igual que la curvatura para cada sección de la columna que se analice [5].

La excentricidad de primer orden (e_1), es la relación entre el momento y el axial de las demandas. La columna puede estar sometida a excentricidades de primer orden de igual magnitud y/o signo en sus extremos o de diferente magnitud y signo. En caso que las excentricidades en ambos extremos sean iguales, la excentricidad de primer se calcula en la Ec [2.2.8].

$$e_1 = \frac{M_{ext}}{N_{ext}} \quad \text{Ec [2.2.8]}$$

Cuando las excentricidades de los extremos de la columna son de diferente magnitud y/o signo, se calcula una excentricidad equivalente (e_{eq}) según el método de la columna modelo [3], que propone una simplificación al reemplazar las dos excentricidades diferentes, por una excentricidad equivalente de igual magnitud y signo aplicada en cada extremo de la columna [Figura 2.9]



Caso 1, 2, 3 al aplicar el método de la columna modelo se convierten en 4 para el análisis

Figura 2.9.- Método de la columna modelo para la excentricidad equivalente

La excentricidad equivalente (e_{eq}) se obtiene según la Ec [2.2.9].

$$e_{eq} = 0.6e_2 + 0.4e_1 \geq 0.4e_2 \quad \text{Ec [2.2.9]}$$

Donde:

$e_2 \rightarrow$ Excentricidad de mayor valor absoluto, considerada con signo positivo [15].

$e_1 \rightarrow$ Excentricidad de menor valor absoluto, considerada con signo positivo si los momentos en los extremos de la columna son del mismo signo y signo negativo caso contrario [15].

La excentricidad accidental o inevitable (e_a), son valores experimentales para incorporar al análisis los efectos de imperfecciones constructivas, incertidumbre del punto de aplicación de la carga, heterogeneidad de los materiales, entre otros [16], [3], Este valor se estima en Ec [2.2.10].

$$e_a = \max(h/20 \quad 0.02 \quad KL/300) \quad \text{Ec [2.2.10]}$$

Donde:

$h \rightarrow$ Peralte de la sección crítica que se analiza (metros)

$KL \rightarrow$ Longitud efectiva de la columna (metros)

El método de la longitud efectiva simplifica el análisis de la distribución de curvaturas, ya que, siempre se analiza una columna doblemente articulada, cuya sección crítica está ubicada en la mitad de su longitud. Esta simplificación

se usa para eliminar el complejo análisis de cada una de las secciones para cada variación de la curvatura, hasta localizar su sección crítica. Existen diferentes distribuciones de curvaturas, las que se indican en el Anexo 1; en esta tesis, para obtener la excentricidad de segundo orden se usó la distribución senoidal de curvaturas, que parte de la deducción de la flexión para vigas/columnas y de la carga crítica de Euler [17].

En la deducción de la flexión se obtiene una relación proporcional entre la curvatura de la sección y el momento flexionante E_c [2.2.11] [18].

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI} \quad E_c [2.2.11]$$

Se conoce que el momento (M) es el producto de la fuerza axial por el brazo de palanca medido desde la deformada [Figura 2.10], si se aplica este criterio en la E_c [2.2.11] se obtiene la E_c [2.2.12].

$$\frac{1}{r} = \frac{Py}{EI} \quad E_c [2.2.12]$$

Donde:

y = Distancia medida desde el eje de la columna hasta la deformada de la misma, es decir, la excentricidad de segundo orden (e_2).

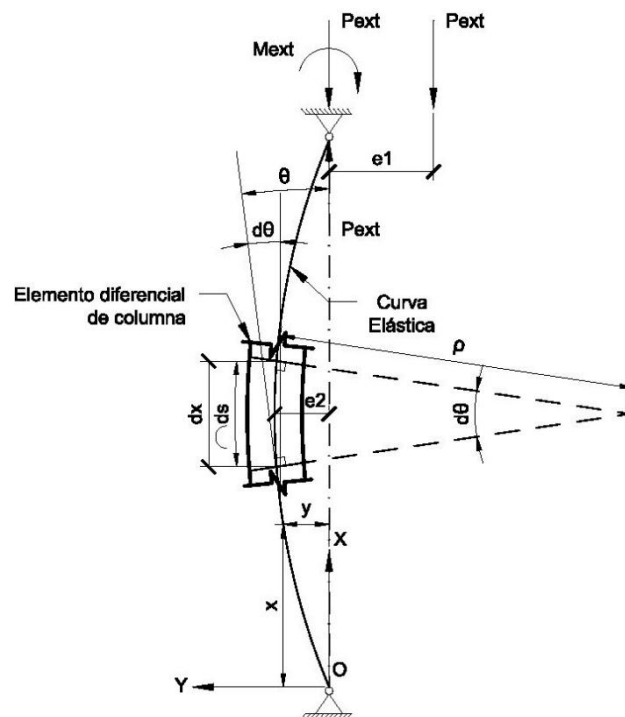


Figura 2.10.- Deducción de la excentricidad de segundo orden con distribución de curvatura senoidal

Despejando $\frac{P_{crit}}{EI}$ de la ecuación de la carga crítica de Euler Ec [2.1.1], y $\frac{P}{EI}$ de la Ec [2.2.12], se igualan estas ecuaciones para obtener la Ec [2.2.13] [18].

$$\frac{1}{r \cdot e_2} = \frac{\pi^2}{(KL)^2} \quad \text{Ec [2.2.13]}$$

Al despejar e_2 de Ec [2.2.13] se obtiene la excentricidad de segundo orden para una distribución senoidal de curvaturas (Ec [2.2.14]) [18].

$$e_2 = \frac{1}{r} \left(\frac{L_e}{\pi} \right)^2 \quad \text{Ec [2.2.14]}$$

Aplicando el estudio de Timoshenko [5] [3], para columnas cargadas excéntricamente [Figura 2.11], se obtiene la excentricidad total (e_{tot}) al sumar las excentricidades de primer orden (e_1), segundo orden (e_2) y la excentricidad accidental (e_a) Ec [2.2.15].

$$e_{tot} = e_1 + e_2 + e_a = \frac{M_{ext}}{N_{ext}} + \frac{1}{r} \left(\frac{L_e}{\pi} \right)^2 + e_a \quad \text{Ec [2.2.15]}$$

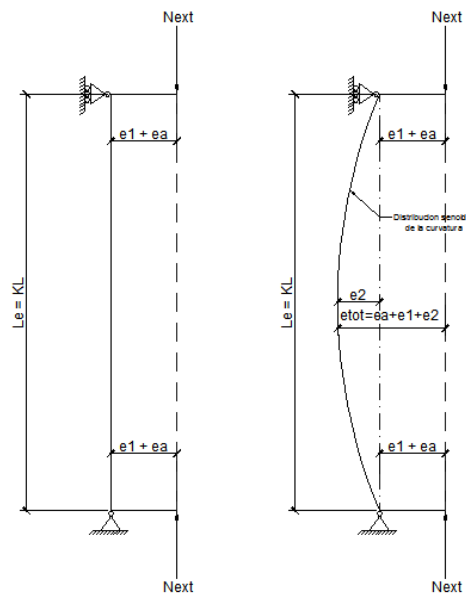


Figura 2.11.- Directriz geométrica: Criterio de Timoshenko

La esbeltez geométrica de la columna (λ) es la relación entre su longitud efectiva y el peralte de la sección. La esbeltez geométrica se muestra en Ec [2.2.16] [5].

$$\lambda = \frac{L_e}{h} \quad \text{Ec [2.2.16]}$$

La directriz geométrica [Figura 2.12], queda definida al incorporar al total de las excentricidades la esbeltez geométrica de la columna, reemplazando la Ec [2.2.16] en la Ec [2.2.15] se obtiene la Ec [2.2.17].

$$D_{geo} = (e_1 + e_a) + \frac{1}{r} \left(\frac{\lambda h}{\pi} \right)^2 \quad \text{Ec [2.2.17]}$$

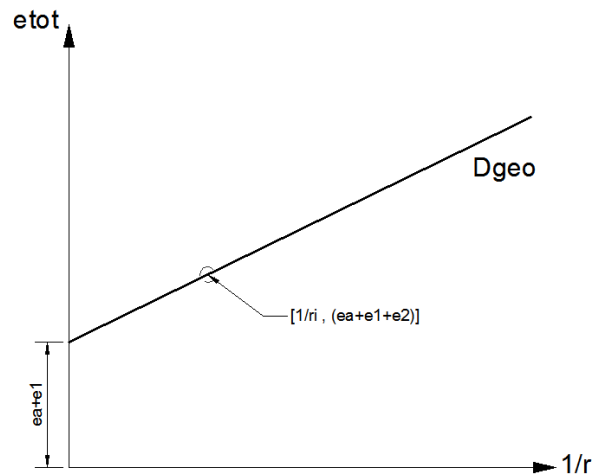


Figura 2.12.- Directriz Geométrica

2.4 Obtención de la carga crítica debido a la inestabilidad de una columna esbelta según el código ACI318-11 y AISC360-10

2.4.1 Obtención de la carga crítica según el código ACI318-11

La carga crítica de una sección de hormigón, se calculó siguiendo el código ACI318-11 [9]. La sección 10.10 del código ACI 318-11, es la que presenta las consideraciones necesarias para el análisis y dimensionamiento de elementos esbeltos sometidos a compresión.

El código ACI permite ignorar los efectos causados por la esbeltez, es decir, los efectos de segundo orden, en columnas que cumplan con la ecuación Ec [2.3.1]

$$\frac{KL}{r_g} \leq 22 \quad \text{Ec [2.3.1]}$$

Donde:

$r_g \rightarrow$ Radio de giro de la sección transversal de la columna.

Si no se conoce el valor de r_g , el código permite asumirlo como 0.3 veces la dimensión más pequeña de la sección transversal del elemento.

Cuando una columna no cumpla con la Ec [2.3.1], y se deban considerar los efectos de segundo orden; el código recomienda un diseño basado en un análisis no lineal de segundo orden, un análisis elástico de segundo orden o el método amplificación de momentos, imponiendo la restricción que los momentos totales del análisis de segundo orden no deben exceder 1.4 veces los momentos debidos a un análisis lineal.

Según el código para todo análisis de segundo orden se deben tomar las siguientes consideraciones:

- No linealidad del material
- Curva del elemento y la deriva
- Duración de la carga
- Retracción y flujo plástico
- Interacción con la cimentación

Además, la rigidez EI usada en el análisis de segundo orden, corresponde a la rigidez de la sección en el instante previo a la falla. Como alternativa para cumplir con este requerimiento, el código propone una ecuación para la inercia del elemento cuando el mismo está sometido a compresión (Ec [2.3.2]), en la cual el valor de I nunca debe ser menor que $0.35 I_g$.

$$I = \left(0.80 + 25 \frac{A_{st}}{A_g} \right) \cdot \left(1 - \frac{M_U}{P_U h} - 0.5 \frac{P_U}{P_o} \right) \cdot I_g \leq 0.875 I_g \quad \text{Ec [2.3.2]}$$

Donde:

$A_{st} \rightarrow$ Área total del refuerzo longitudinal

$A_g \rightarrow$ Área bruta de la sección de hormigón.

$M_U \rightarrow$ Momento mayorado correspondiente a la combinación de carga en consideración

$P_u \rightarrow$ Fuerza axial mayorada correspondiente a la combinación de carga en consideración

$P_o \rightarrow$ Resistencia axial nominal de la columna.

$I_g \rightarrow$ Momento de inercia de la sección bruta de hormigón.

En el código también se muestra una tabla para distintos tipos de elementos estructurales no preesforzados sometidos a compresión, en la cual se dan valores para la inercia (I) de cada uno de estos elementos en función de su I_g , esta tabla se presenta en el Anexo 2.

Para el cálculo del módulo de elasticidad del hormigón (E_c), el código presenta dos ecuaciones, las que se muestran en: Ec [2.3.3] y Ec [2.3.4].

$$E_c = 15100 \sqrt{f'c} \rightarrow \text{Hormigón de densidad normal} \quad \text{Ec [2.3.3]}$$

$$E_c = w_c^{1.5} \cdot 0.14 \cdot \sqrt{f'c} \rightarrow \text{Hormigón con } w_c \text{ comprendidos entre 1440 y 2560 kg/m}^3 \quad \text{Ec [2.3.4]}$$

Para el diseño de un elemento esbelto el código ACI se basa en el método de la amplificación de momentos, en el que se calcula un factor δ que será siempre mayor a 1. A continuación se hará una breve explicación del método de magnificación de momentos el cual nos servirá para luego compararlo con la metodología usada en esta tesis.

Este método tiene como objetivo, la obtención del momento total de diseño para una columna esbelta mediante la amplificación del momento M , calculado para una columna corta (análisis de primer orden) [13]. El momento último de diseño será el dado por la ecuación Ec [2.3.5].

$$M_c = \delta \cdot M_1 \quad \text{Ec [2.3.5]}$$

Donde:

$\delta \rightarrow$ Factor de amplificación de momentos para tener en cuenta los efectos de la curvatura en un elemento sometido a compresión Ec [2.3.6]

$$\delta = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{0.75 \cdot P_c}} \quad \text{Ec [2.3.6]}$$

Donde:

$C_m \rightarrow$ Factor que relaciona el diagrama real de momentos con un diagrama equivalente de momento uniforme ecuación Ec [2.3.7].

$$C_m = 0.6 + 0.4 \cdot \frac{M_1}{M_2} \quad \text{Ec [2.3.7]}$$

El término $\frac{M_1}{M_2}$ es el cociente entre los momentos aplicados en los extremos de la columna.

$P_u \rightarrow$ Fuerza axial mayorada.

$P_c \rightarrow$ Carga crítica de Euler dada por la Ec [2.1.1], donde EI se puede asumir como (Ec [2.3.8]):

$$EI = \frac{0.4 \cdot E_c \cdot I_g}{1 + \beta_{dns}} \quad \text{Ec [2.3.8]}$$

El valor de EI también se lo puede calcular usando el producto de la Ec [2.3.2] por la Ec [2.3.3] o Ec [2.3.4] dividido para $(1 + \beta_{dns})$, para considerar la fluencia prematura del acero en columnas sometidas a cargas permanentes. Una simplificación dada por el código, es asumir para este cálculo, es $\beta_{dns} = 0.6$.

2.4.2 Obtención de la carga crítica según el código AISC360-10

La carga crítica de una sección de acero rellena de hormigón, se calculó siguiendo el código AISC360-10 [17], los comentarios de la especificación AISC 2010 [6] y Design Examples Version 13.0 AISC 2005 [19].

Una columna de acero se considera esbelta [Figura 2.13] si se cumple la Ec [2.3.9]:

$$\frac{KL}{r_g} > 4.71 \sqrt{\frac{E}{F_y}} \quad \text{Ec [2.3.9]}$$

Si la Ec [2.3.9] no se cumple entonces la columna es intermedia-corta [Figura 2.13].

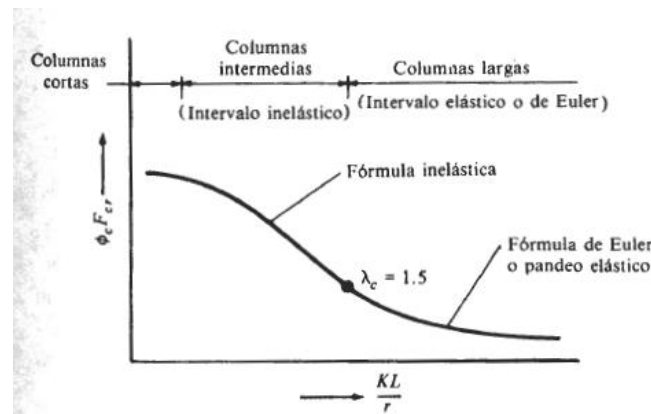


Figura 2.13.- Diagrama de clasificación de columnas según su esbeltez [7]

El reglamento AISC360-10, contiene en su Capítulo I: Diseño de miembros de sección compuesta la especificación de diseño para miembros de acero rellenos de hormigón.

Se comprobaron los estados límite de pandeo local y pandeo por flexión. Para el diseño de columnas rellenas, se empleó la siguiente simbología general:

$A_c \rightarrow$ Área de hormigón dentro de la sección del perfil de acero



$A_s \rightarrow$ Área de la sección transversal del perfil del acero

$E_s \rightarrow$ Módulo de elasticidad del acero

$E_c \rightarrow$ Módulo de elasticidad del hormigón

$F_y \rightarrow$ Esfuerzo mínimo de fluencia del acero

$f'_c \rightarrow$ Resistencia característica del hormigón a los 28 días

$I_c \rightarrow$ Momento de inercia del hormigón

$I_s \rightarrow$ Momento de inercia del perfil de acero

$K \rightarrow$ Factor de reducción de longitud

$L \rightarrow$ Longitud real de la columna

$P_n \rightarrow$ Resistencia nominal a compresión

$w_c \rightarrow$ Peso específico del hormigón $[1500 \leq w_c (kg/m^3) \leq 2500]$

Para determinar la fuerza axial máxima se usó la “sección I2.2: Fuerza Axial, columnas compuestas rellenas”.

Para columnas rectangulares (doblemente simétricas), el pandeo por flexión (P_n) se calculó según su esbeltez.

Si $\frac{P_{no}}{P_e} \leq 2.25$ se aplica la Ec [2.3.10], caso contrario, si $\frac{P_{no}}{P_e} > 2.25$ se usa la

Ec [2.3.11], P_{no} y P_e se calculan según la Ec [2.3.12].

$$P_n = P_{no} \left[0.658^{\left(\frac{P_{no}}{P_e} \right)} \right] \quad \text{Ec [2.3.10]}$$

$$P_n = 0.877 P_e \quad \text{Ec [2.3.11]}$$

$$\begin{aligned}P_{no} &= F_y A_s + 0.85 f'_c A_c \\P_e &= \frac{\pi^2 (EI_{eff})}{(KL)^2} \\EI_{eff} &= E_s I_s + C_1 E_c I_c \\C_1 &= 0.6 + 2 \left(\frac{A_s}{A_c + A_s} \right) \leq 0.9\end{aligned}\tag{Ec [2.3.12]}$$

Donde:

P_{no} → Resistencia nominal a compresión, para miembros con simetría doble con longitud nula cargados axialmente

P_e → Carga crítica de pandeo elástico

EI_{eff} → Rigidez efectiva de la sección compuesta

C_1 → Coeficiente para calcular la rigidez efectiva de la columna compuesta

El valor de E_c se obtiene según el código ACI318 Ec [2.3.4].

La capacidad debida al pandeo local, se determina a través de la clasificación de la sección en compacta, no compacta, o esbelta analizando la mayor relación de esbeltez (λ) y comparando con los límites, donde:

$$\lambda = \max(b/t \quad h/t)\tag{Ec [2.3.13]}$$

λ → Esbeltez de la sección analizada

λ_p → Límite entre compacto y no compacto para fuerza axial

λ_r → Límite entre no compacto y esbelto para fuerza axial

En esta tesis se asume que la sección analizada es compacta, por lo que, su capacidad axial nominal no se ve reducida por pandeo local.

La resistencia máxima de la sección a flexión se calcula según la Sección I.3.4: Flexión de miembros compuestos rellenos del código AISC360-10. La capacidad a flexión de una columna rellena depende, del tipo de sección clasificada por el pandeo local al igual que en compresión, pero tomando los límites λ_p y λ_r de flexión mostrados en el Anexo 3.

Según los límites establecidos mediante los bloques de tensiones típicos, se determina la resistencia nominal a flexión de secciones rectangulares rellenas

compactas (Anexo 4). Las secciones compactas desarrollan toda la resistencia plástica (M_p).

Para el análisis de estabilidad el código AISC 360-10 en su Capítulo C: Diseño por estabilidad, contempla que para la estabilidad de la estructura deben considerarse efectos de segundo orden, que se describen en el Anexo 8 del código.

Según el código, el análisis de segundo orden es permitido para determinar los efectos ($P-\delta$), para cualquier miembro en compresión individual. La resistencia de segundo orden requerida a flexión (M_r) y la resistencia axial (P_r), se determinan según la Ec [2.3.14]

$$\begin{aligned} M_r &= (B_1)M_{nt} + B_2M_{lt} \\ P_r &= P_{nt} + B_2P_{lt} \\ (P-\Delta) \end{aligned} \quad \text{Ec [2.3.14]}$$

Donde:

$B_1 \rightarrow$ Factor de amplificación de los efectos ($P-\delta$).

$M_{nt} \rightarrow$ Momento de primer orden cuando en la estructura no hay desplazamiento lateral.

$B_2 \rightarrow$ Factor de amplificación de los efectos ($P-\Delta$), determinado para cada dirección de traslación lateral.

$M_{lt} \rightarrow$ Momento de primer orden originado solo por el desplazamiento lateral.

$P_{nt} \rightarrow$ Fuerza axial de primer orden cuando en la estructura no hay desplazamiento lateral.

$P_{lt} \rightarrow$ Fuerza axial de primer orden generado solo por el desplazamiento lateral.

Para obtener el factor de amplificación (B_1), se usa la Ec [2.3.15]

$$B_1 = \frac{C_m}{1 - \frac{P_r}{P_{e1}}} \quad \text{Ec [2.3.15]}$$

Donde:

$P_{e1} \rightarrow$ Resistencia a pandeo elástico del elemento en el plano de flexión calculada suponiendo que no hay desplazamiento en los nudos (Ec [2.3.16])

$$P_{e1} = \frac{\pi^2 EI^*}{(K_1 L)^2} \quad \text{Ec [2.3.16]}$$

Donde:

$$EI^* \rightarrow 0.8 \tau_b EI .$$

$C_m \rightarrow$ Coeficiente que supone un marco sin translación lateral, el que está dado por la Ec [2.3.17]

$$C_m = 0.6 - 0.4 \frac{M_1}{M_2} \quad \text{Ec [2.3.17]}$$

Se asume un factor C_m de 1, conservativamente, ya que, el miembro es flectado en curvatura simple por lo tanto la razón $\frac{M_1}{M_2}$ es negativa.



Capítulo 3 METODOLOGÍA

3.1 Consideraciones e hipótesis

Para el estudio y desarrollo de esta tesis se tomaron las siguientes consideraciones e hipótesis que se presentan a continuación:

- Se asumen como datos conocidos todas las características de la sección transversal de la columna.
- Se asume como dato la fuerza axial y el momento flector externos, y se las considera que estas son las fuerzas ya mayoradas.
- Todas las cargas aplicadas son perpendiculares a la sección de la columna (cargas gravitacionales).
- Se analiza la columna solamente en la dirección más desfavorable ante el pandeo.
- Para el análisis, a la columna se la considera aislada, es decir no sufre ningún tipo de acción de otros elementos.
- El análisis se realiza solo para la sección más crítica a lo largo de toda la longitud de la columna, debido a que esta es la que mayor curvatura tendrá.
- El aporte del hormigón a tracción se desprecia en su totalidad, tanto para la columna de hormigón como para la de acero rellena de hormigón.
- Para ambos tipos de columnas se asume una distribución lineal de sus deformaciones en la sección.
- Se considera columnas de secciones y armado longitudinal constantes a lo largo de toda su longitud.
- En el análisis no se consideran efectos producidos por la temperatura o la adherencia de los materiales.
- Se asume como dato valedero para la columna el factor k de reducción de longitud.
- Se considera que las deformaciones de los materiales siempre estarán regidas por sus ecuaciones constitutivas.

- Se asume que la columna ha fallado cuando cualquiera de sus materiales ha sobrepasado su deformación última.
- Se asume una velocidad de aplicación de cargas lenta y de larga duración (Figura 2.4).
- Todas las consideraciones del método dadas para la columna de hormigón armado son valederas para la columna de acero rellena de hormigón, al menos que se indique lo contrario.
- Para columnas de hormigón no se considera el efecto del confinamiento, ya que, no se analiza el refuerzo transversal de la columna, mientras que para columnas de acero rellenas de hormigón se asume cierto grado de confinamiento.
- Para columnas de acero rellenas de hormigón el análisis contempla solamente secciones compactas debido a que no sufren reducción debido al pandeo local.

3.2 Deducciones y planteamiento del problema

La metodología desarrollada se basa en encontrar el momento flector máximo M_n (limitado por inestabilidad o agotamiento), que puede soportar una columna dada la fuerza axial P_n que actúa sobre ella.

Para obtener M_n , se deben contar como datos invariantes de la columna las dimensiones de la sección transversal (b, h) , longitud de la columna (L) , coeficiente de longitud efectiva (K) , cuantía y recubrimiento (columna de hormigón) o espesor uniforme del perfil (columna de acero rellena de hormigón), resistencia máxima de los materiales (f'_c, F_y) y sus curvas constitutivas.

Una vez que se cuenta con todos estos datos para la obtención de las directrices se sigue el siguiente procedimiento:

1. Cálculo de la longitud efectiva de la columna (L_e) .
2. Se asigna un valor inicial de iteración a la curvatura $(1/r_0)$.
3. Se asigna un valor inicial de iteración al eje neutro (X_{n0}) .
4. Para el valor dado de la curvatura $(1/r_i)$ y del eje neutro (X_{ni}) , se calcula la fuerza axial y el momento flector interno, mediante el cálculo de sus esfuerzos internos.
5. Se calcula el error relativo entre la fuerza axial interna y la fuerza axial externa dada.
6. Se compara, el error obtenido, con una tolerancia previamente establecida.

7. Si el valor del error es menor a la tolerancia, el par ordenado $\left(\frac{1}{r_i}, e_i\right)$, serán un punto de la directriz mecánica y se continua con el paso 9; caso contrario se asignará otro valor a x_n y se regresa al paso 5.
8. Se calcula un punto de la excentricidad de segundo orden $\left(\frac{1}{r_i}, e_{2i}\right)$.
9. Se calculan las deformaciones de cada uno de los materiales en sus puntos de máxima deformación.
10. Se compara las deformaciones calculadas, con las deformaciones máximas admisibles para cada material; si la deformación de cualquiera de los materiales equipara su correspondiente deformación máxima ese será el punto de curvatura última y se continúa con el paso 12, caso contrario se asigna otro valor a la curvatura y se regresa al paso 4.
11. Se obtiene la directriz geométrica.
12. Se ubica el punto de tangencia entre las directrices.
13. Se calcula la excentricidad de la demanda (Ec [2.2.17])
14. Se obtiene el máximo momento de la demanda por inestabilidad (Ec [2.2.8])
15. Se grafica la directriz mecánica y geométrica.
16. Se encuentra un punto del diagrama de interacción.

Una vez que se tiene el máximo momento flector que es capaz de resistir la columna para un axial dado ya sea por agotamiento o inestabilidad, se repite el procedimiento previamente descrito variando en cada iteración el valor de la fuerza axial, con lo que se obtendrá un conjunto de pares ordenados (M_U, N_U) , que son puntos de diagrama de interacción buscado.

3.3 Obtención de los esfuerzos internos

Una vez que se tienen todos los datos de la sección, la curvatura, su deformación máxima admisible, y la profundidad del eje neutro conocidos; se calcula la fuerza axial y el momento flector internos que es capaz de desarrollar la sección para las condiciones dadas.

Para el cálculo de la deformación en cualquier punto (x) que se desee se utiliza la Ec [3.3.1].

$$\varepsilon_{(x)} = \frac{1}{r}(x_n - x) \quad \text{Ec [3.3.1]}$$

Las deformaciones calculadas con la Ec [3.3.1], ingresan en la curva esfuerzo-deformación constitutiva del material (sección 2.2), obteniendo así el esfuerzo $\sigma_{(\varepsilon)}$ en la deformación $\varepsilon_{(x)}$.

Para el caso del hormigón y del acero de perfiles, las fuerzas axiales tanto a tracción como a compresión se obtienen, al multiplicar el área bajo la curva del diagrama de esfuerzos-deformaciones correspondiente, por el ancho de la sección (b), y el momento se obtendrá al multiplicar la fuerza axial por el brazo de palanca (distancia desde el centro de gravedad al centro de la sección).

Se usó el convenio de signos: compresión ($\leftarrow +$) y tracción ($\rightarrow -$). Los signos de los brazos de palanca serán: positivos cuando el centro de gravedad del área analizada este sobre $h/2$ y negativos caso contrario.

A continuación se describirán los posibles casos que se pueden generar en función de la posición eje neutro para cada material.

- Para el cálculo del aporte del hormigón, primero que se debe calcular su esfuerzo último (σ_{uc}) definido en la ecuación Ec [2.2.1], luego se calcula la posición del punto x_0 con respecto al extremo superior de la sección, mediante la ecuación Ec [3.3.2] la cual se deduce del diagrama de deformaciones.

$$x_0 = x_n - \frac{0.002}{\left(\frac{1}{r}\right)} \quad \text{Ec [3.3.2]}$$

Donde:

$x_0 \rightarrow$ Distancia en la sección transversal a la que se produce la transición de parábola a rectángulo en el diagrama esfuerzo-deformación.

Como se observa en la ecuación Ec [3.3.2] el valor x_0 , depende de la posición del eje neutro (x_n) y de la curvatura ($1/r$); a continuación se analizan los posibles casos que se pueden dar en la sección en función de estos 2 parámetros

Caso 1: $x_n \leq 0$ [Figura 3.1]

- No existe aporte del hormigón, pues la sección se encuentra en la zona de tracción pura.

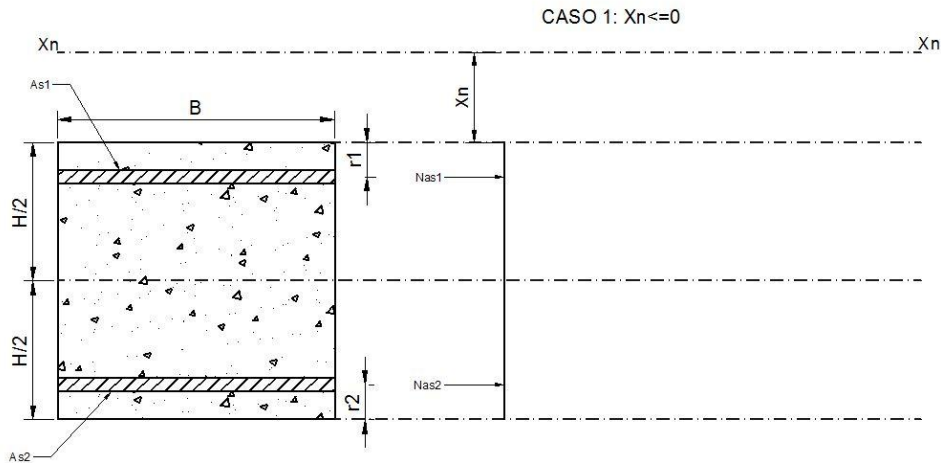


Figura 3.1-Caso 1 de distribución de esfuerzos del hormigón

Caso 2: $0 < x_n \leq h$ [Figura 3.2]

- Si $0 < x_0 < x_n$ El punto de plastificación del hormigón se encuentra dentro de la sección, es decir, se tendrá parte de la sección trabajando en el rango elástico A_1 y parte de la sección trabajando en rango plástico A_2 .
- Si $x_0 < 0$ el punto de plastificación del hormigón se encuentra fuera de la sección, es decir, toda la sección se encuentra en un rango elástico, por lo que, el área A_2 es igual a cero.

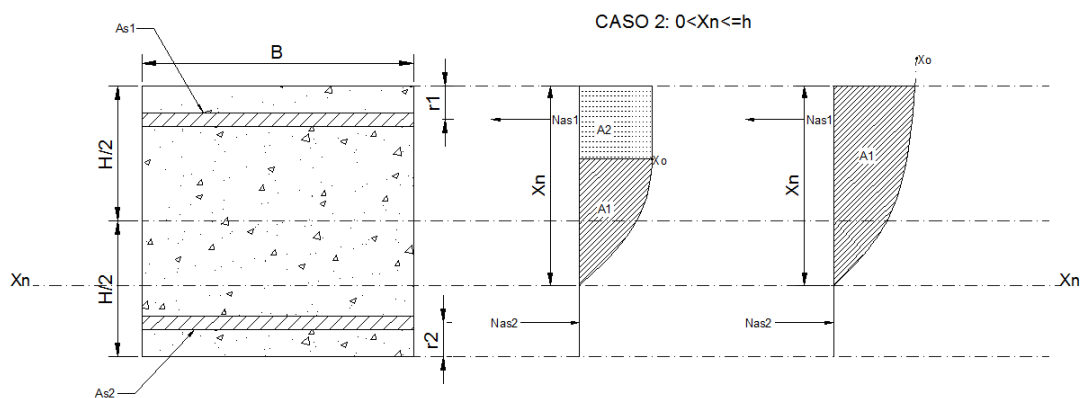


Figura 3.2 -Caso 2 de distribución de esfuerzos del hormigón

Caso 3: $x_n > h$ [Figura 3.3]

- Si $h < x_0 < x_n$ El punto de plastificación del hormigón se encuentra bajo la sección, lo que significa que toda la sección está en un rango plástico por lo que solo se considera el valor de A_2 .

- Si $0 < x_0 < x_n$ El punto de plastificación del hormigón se encuentra dentro de la sección, es decir, se tendrá parte de la sección trabajando en rango elástico A_1 y parte de la sección trabajando en rango plástico A_2 .
- Si $x_0 < 0$ El punto de plastificación se encuentra fuera de la sección, es decir, toda la sección se encuentra en un rango elástico, por lo que, el área A_2 es igual a cero.

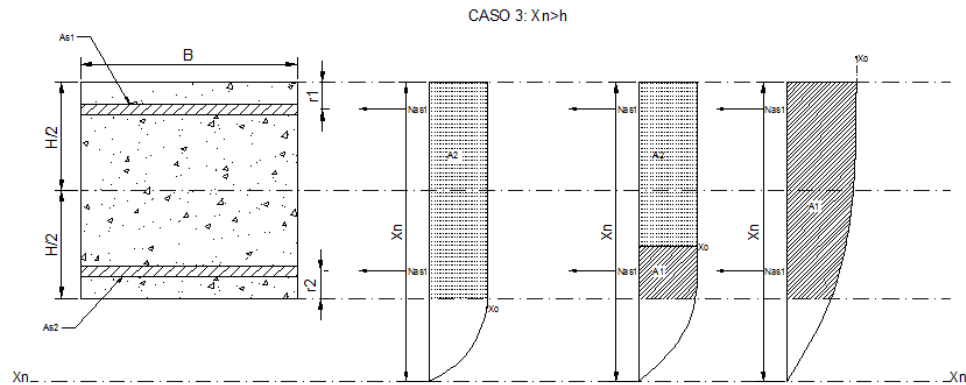


Figura 3.3.- Caso 3 de distribución de esfuerzos del hormigón

- Para obtener los esfuerzos internos de la sección de acero, se calcula primero el esfuerzo de fluencia (σ_{ua}) Ec [3.3.3] y la deformación que produce esta fluencia (ε_{yd}) Ec [3.3.4].

$$\sigma_{ua} = \frac{F_y}{\gamma_s} \quad \text{Ec [3.3.3]}$$

$$\varepsilon_{yd} = \frac{\sigma_{ua}}{E_s} \quad \text{Ec [3.3.4]}$$

x_{0a} Y x_{0b} son los puntos de inicio de plastificación o fluencia para el acero a compresión y tracción respectivamente, sus valores se muestran en Ec [3.3.5].

$$x_{0a} = x_n - \frac{\varepsilon_{yd}}{1/r} \quad \text{Ec [3.3.5]}$$

$$x_{0b} = x_n + \frac{\varepsilon_{yd}}{1/r}$$

Para un eje neutro y un radio de curvatura dados, se analizan los posibles casos que se pueden dar en la sección en función de estos 2 parámetros.

Caso 1: $X_n < 0$ [Figura 3.4]

Toda la sección se encuentra a tracción, el punto de inicio de fluencia x_{0b} puede variar desde la plastificación bajo la sección ($x_{0b} > h$), es decir, toda la sección desarrolla esfuerzos elásticos, hasta la plastificación sobre la sección ($x_{0b} < 0$) donde la sección ha fluido en todos los puntos.

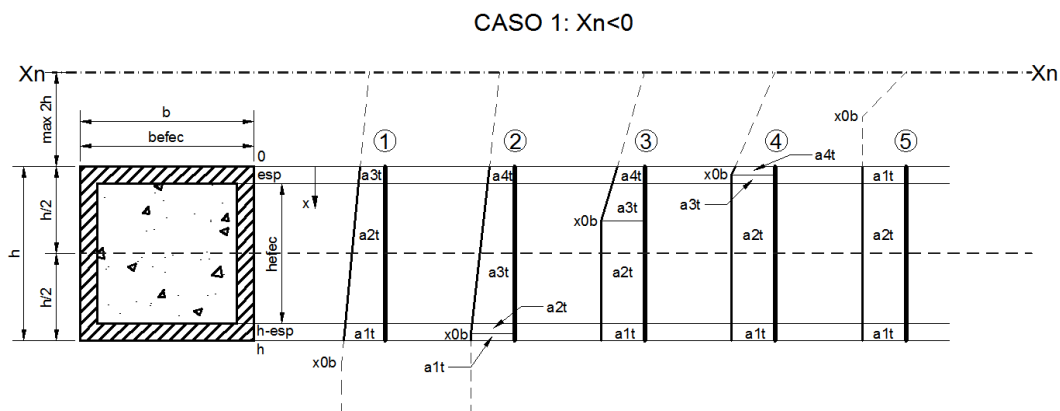


Figura 3.4.-Caso 1 de distribución de esfuerzos del acero

Caso 2: $0 \leq X_n \leq esp$ [Figura 3.5]

Existe un aporte mínimo a compresión y un gran aporte a tracción, se asume que no puede haber fluencia en el patín superior de la sección rellena, por lo tanto, el punto de inicio de fluencia x_{0b} puede encontrarse:

- $[esp < x_{0b} < (h - esp)]$
- $[(h - esp) \leq x_{0b} \leq h]$
- $[x_{0b} > h]$

CASO 2: $0 \leq x_n \leq esp$

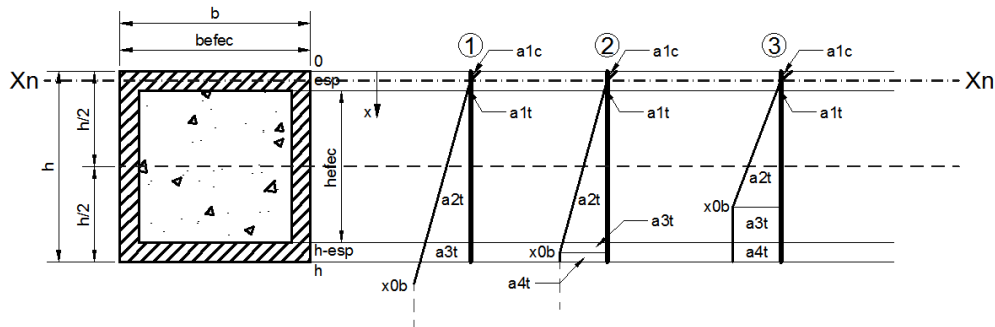


Figura 3.5.- Caso 2 de distribución de esfuerzos del acero

Caso 3: $esp < X_n < (h - esp)$ [Figura 3.6]

Para este caso se analiza cada uno de los tres subcasos de la Figura 3.3 por separado la tracción de la compresión.

Para el análisis a compresión el punto de inicio de fluencia x_{0a} puede variar desde:

- $[x_{0a} < 0]$
- $[0 \leq x_{0a} \leq esp]$
- $[esp < x_{0a} < x_n]$

Para el análisis a tracción el punto de inicio de plastificación x_{0b} puede variar desde:

- $[x_n < x_{0b} < (h - esp)]$
- $[(h - esp) \leq x_{0b} \leq h]$
- $[x_{0b} > h]$

CASO 3: $esp < x_n < (h - esp)$

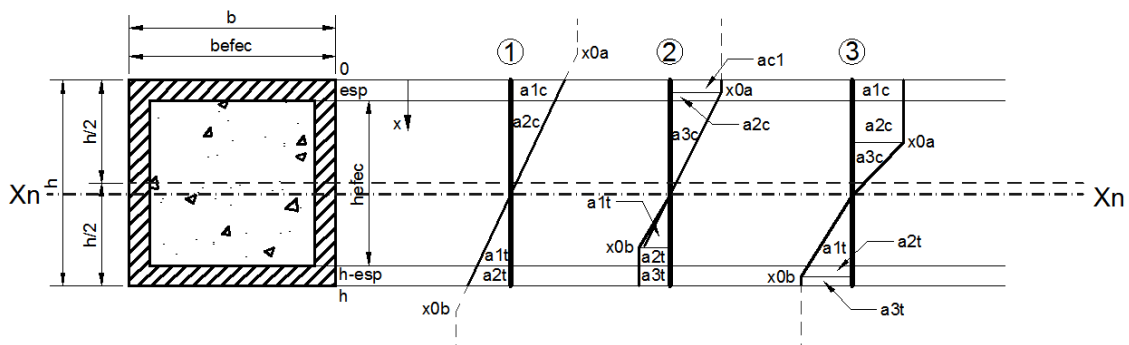


Figura 3.6.- Caso 3 de distribución de esfuerzos del acero

Caso 4: $(h - esp) \leq X_n < h$ [Figura 3.7]

El aporte casi en su totalidad es a compresión, un mínimo aporta a tracción, se asume que no puede existir plastificación en el patín inferior donde se encuentra el eje neutro. El punto de inicio de plastificación x_{0a} puede variar desde:

- $[(h - esp) < x_{0a} < esp]$
- $[esp \leq x_{0a} \leq 0]$
- $[x_{0a} < 0]$

CASO 4: $(h-esp) \leq x_n \leq h$

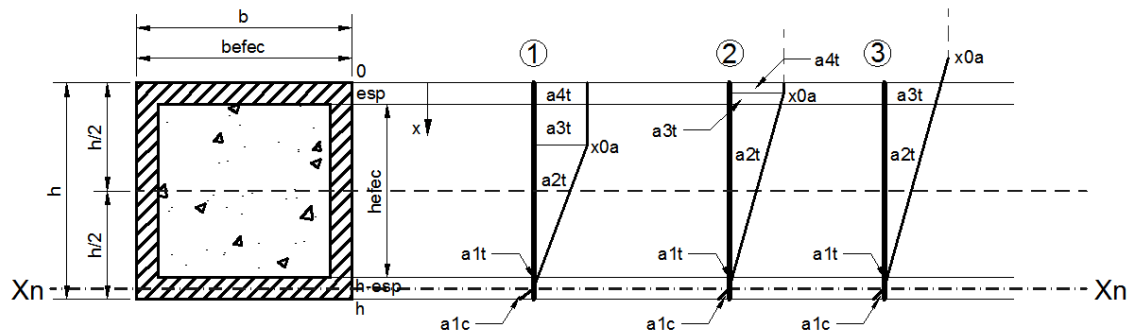


Figura 3.7.- Caso 4 de distribución de esfuerzos del acero

Caso 5: $X_n > h$ [Figura 3.8]

En este caso toda la sección está a compresión, el punto de inicio de plastificación puede variar desde $(x_{0a} > h)$, es decir, toda la sección a plastificado a compresión, hasta $(x_{0a} < 0)$ cuando toda la sección está en el rango elástico.

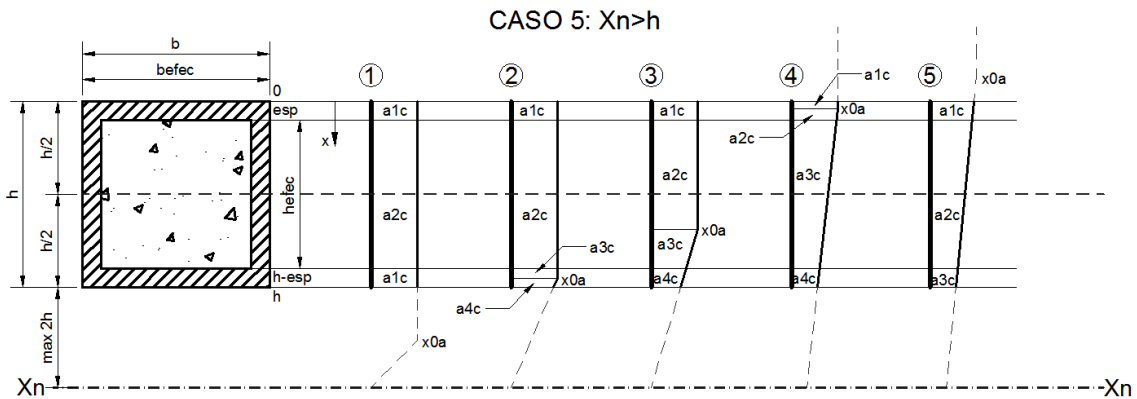


Figura 3.8.- Caso 5 de distribución de esfuerzos del acero

- Para el caso del acero de refuerzo en columnas de hormigón armado, se asume que el área de acero está distribuida en todo el ancho de la sección [Figura2.256], con un aporte puntual localizado en $x = re$ y $x = d$; al evaluar estos puntos en la ecuación E_c [3.3.1] se obtienen sus deformaciones que ingresan al diagrama esfuerzo-deformación del acero de refuerzo obteniendo los esfuerzos correspondientes. La fuerza axial será igual al producto entre el esfuerzo por el área de acero respectiva, y el momento será el producto del área por su brazo de palanca.

3.4 Obtención de la directriz geométrica y mecánica de la columna

La directriz mecánica está conformada por una sucesión de puntos $(e_i, 1/r)$, los cuales hacen que el axial interno se iguale al axial externo dado, para valores conocidos del eje neutro (x_n) y de la curvatura $(1/r)$. Este será un proceso iterativo para cada valor de la curvatura $(1/r)$ hasta llegar a la curvatura última $(1/r_u)$, que corresponde al último punto de la directriz mecánica. La directriz mecánica obtenida mediante el proceso descrito se muestra en la Figura 3.9

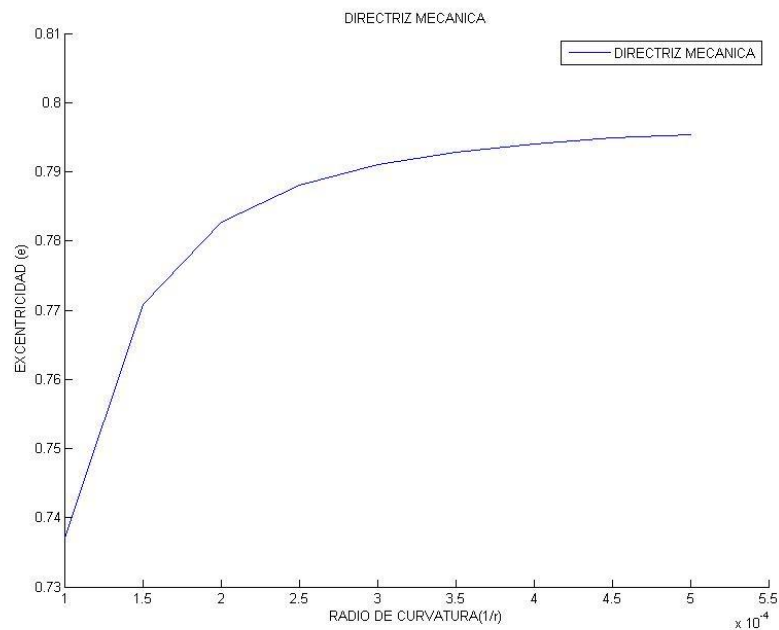


Figura 3.9 Directriz mecánica de una columna (metodología propuesta)

Una vez que se han calculado todos los componentes de la excentricidad total (e_1, e_2, e_a) , para obtener la excentricidad geométrica, se tiene que sumar el valor de la excentricidad de primer orden e_1 y accidental e_a a todos los valores obtenidos de la excentricidad de la excentricidad de segundo orden e_2 . La directriz geométrica obtenida mediante el proceso descrito se muestra en la Figura 3.10.

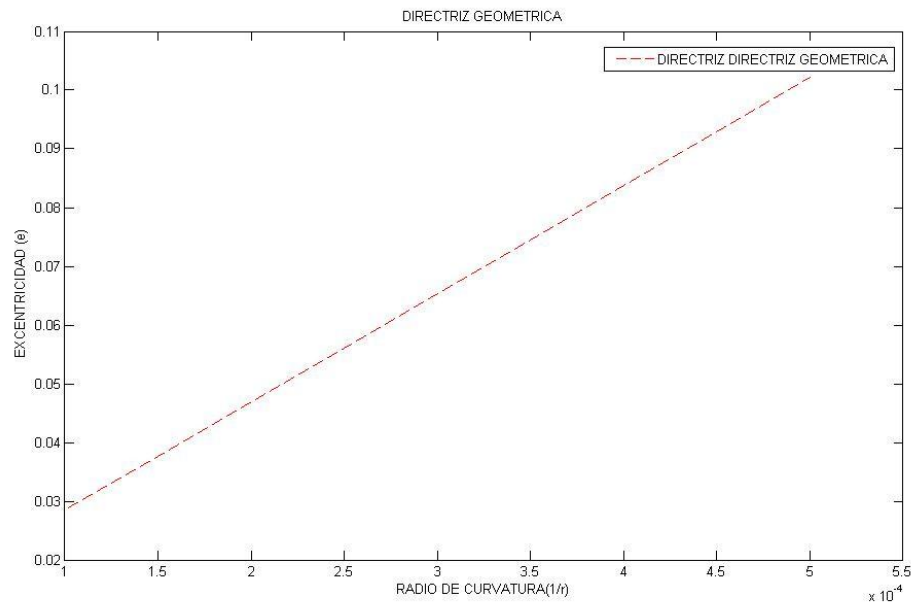


Figura 3.10.- Directriz geométrica de una columna (metodología propuesta)

3.5 Obtención del diagrama de interacción

Una vez que se tiene la directriz geométrica y mecánica se puede encontrar cuál será el punto de falla de la columna, ya sea, por agotamiento (último punto de la directriz mecánica) o inestabilidad (último punto de tangencia entre la directriz geométrica y la directriz mecánica).

Una variación de la directriz mecánica es el diagrama momento-curvatura el cual ayuda a la construcción del diagrama de interacción. El diagrama momento-curvatura se obtiene al multiplicar cada excentricidad de la directriz mecánica por el axial para el que se construyó la directriz.

El punto de falla corresponde al par ordenado del diagrama momento-curvatura $(1/r_u, M_u)$, donde M_u es el momento máximo que puede resistir la sección para el axial dado, que corresponde a un punto del diagrama de interacción (Mu_i, Nu_i) ; para obtener el resto de puntos del diagrama, se debe repetir varias veces el procedimiento de cálculo, variando en cada iteración el valor del axial dado como se observa esquemáticamente en la Figura 3.11.

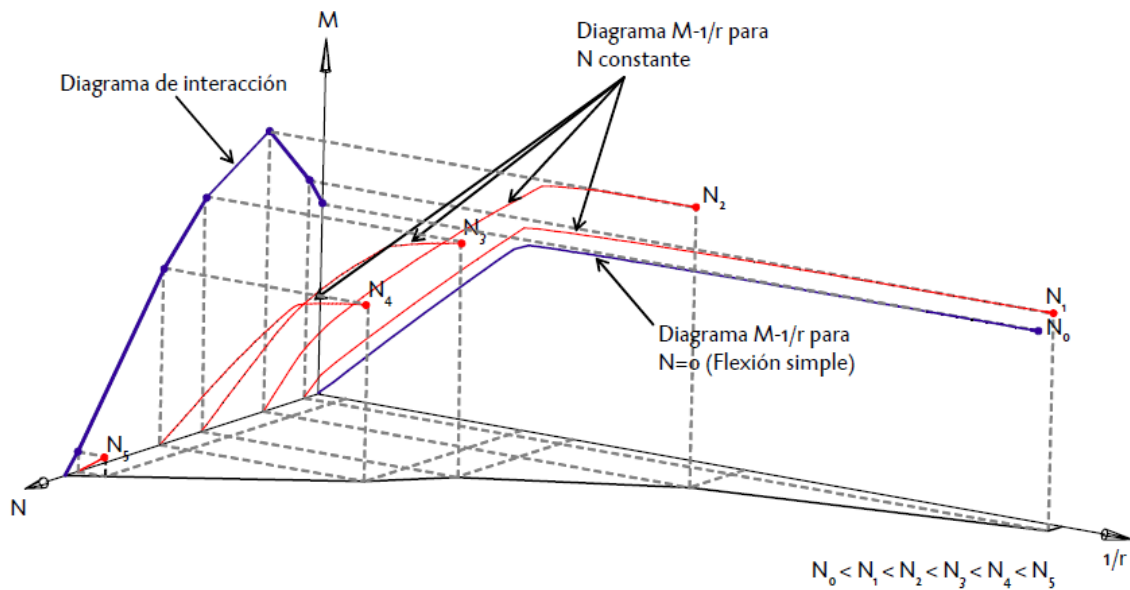


Figura 3.11.- Construcción de un diagrama de interacción a partir del diagrama momento-curvatura [20]

El diagrama de interacción que se obtendrá estará ligado directamente al valor de la esbeltez geométrica de la columna, es así, si la columna analizada tiene una esbeltez geométrica baja (columna corta), se presenta un diagrama de interacción por agotamiento de la sección, por el contrario, si la columna tiene una esbeltez geométrica alta (columna esbelta), se presenta un diagrama de interacción por inestabilidad (pandeo). La consecuencia de la variación de la esbeltez sobre el diagrama de interacción se aprecia en la Figura 3.12, donde, a mayor esbeltez de la columna menor será el diagrama de interacción debido al pandeo.

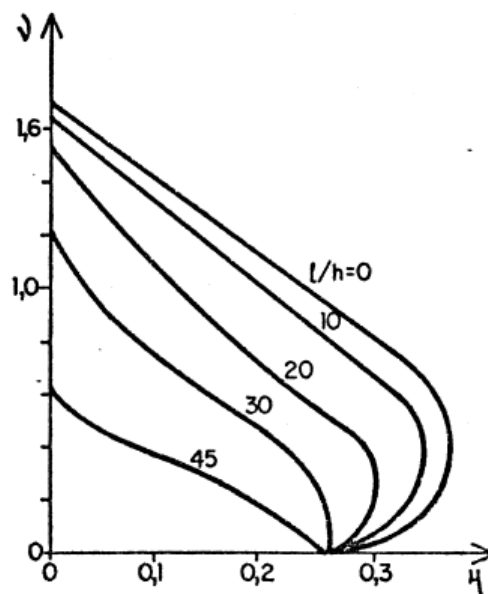


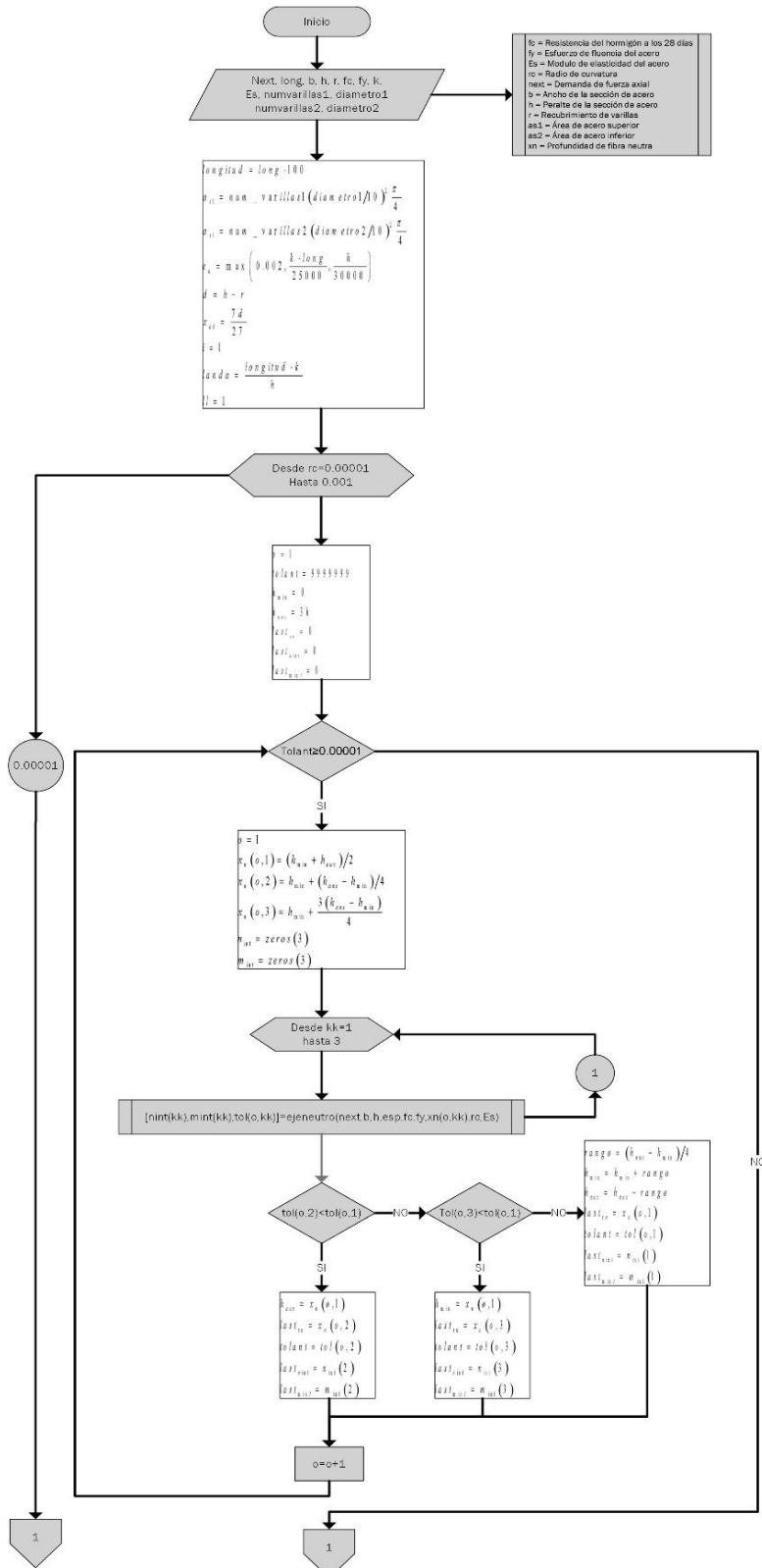
Figura 3.12.-Efecto de la esbeltez geométrica en el comportamiento de columnas esbeltas [4]

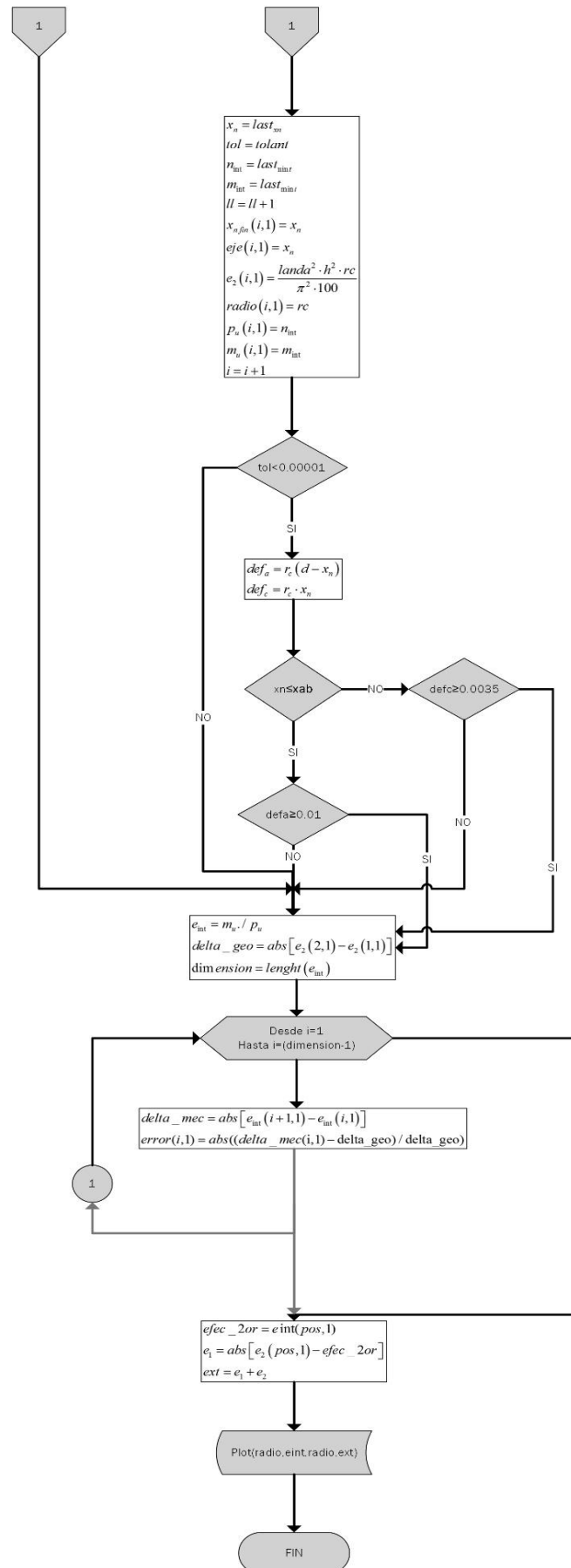
Capítulo 4 IMPLEMENTACIÓN DE LOS ALGORITMOS

4.1 Ingreso de datos y programación en MATLAB.

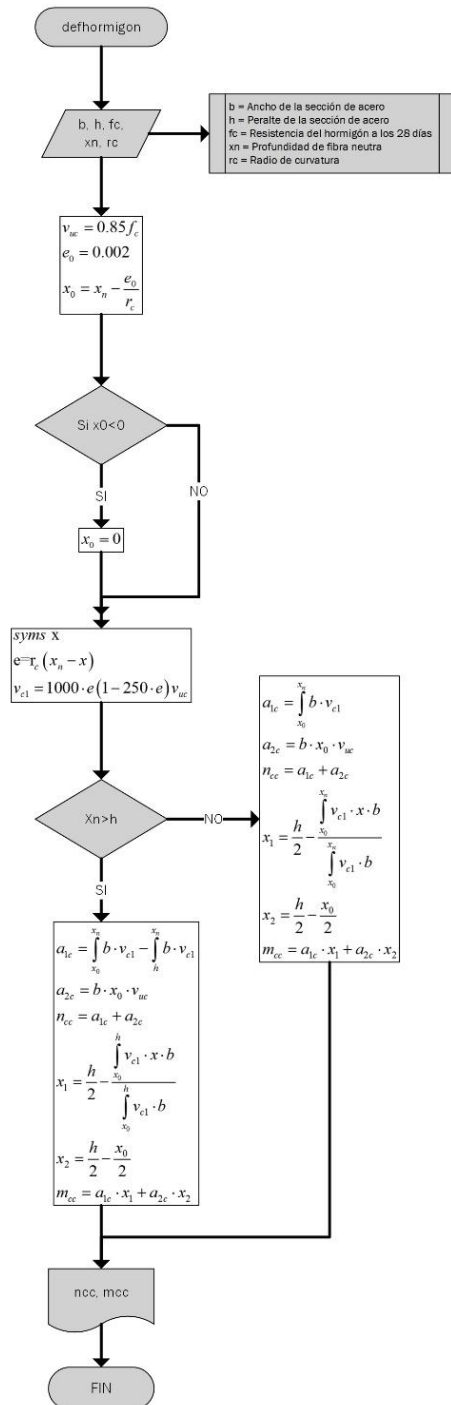
4.1.1 Diagramas de Flujo para columnas de hormigón armado

FUNCION PARA EL CÁLCULO DE LA FUERZA AXIAL Y MOMENTO TOTAL QUE PROPORCIONA LA SECCIÓN DE LA COLUMNA DE HORMIGÓN ARMADO INCLUYENDO EL ACERO DE REFUERZO

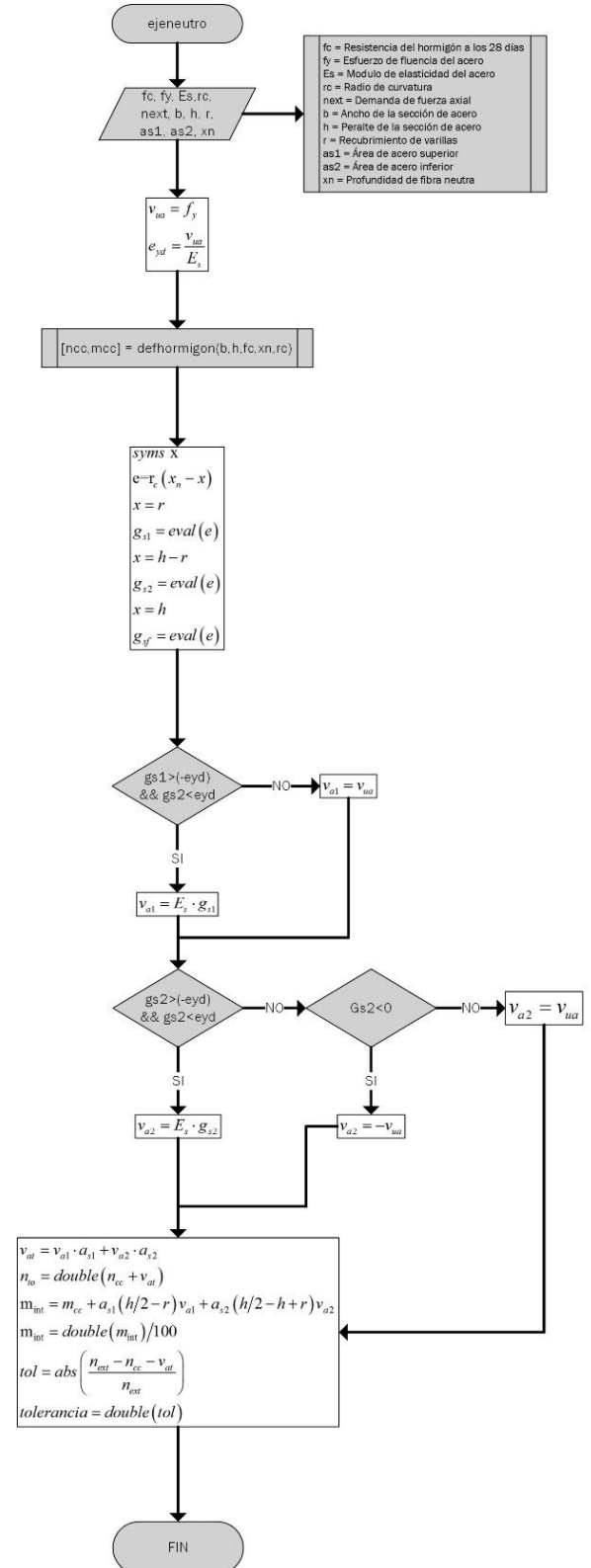




FUNCION PARA EL CÁLCULO DE LA FUERZA AXIAL Y MOMENTO QUE PROPORCIONA EL HORMIGÓN A LA SECCIÓN DE LA COLUMNA DE HORMIGÓN ARMADO

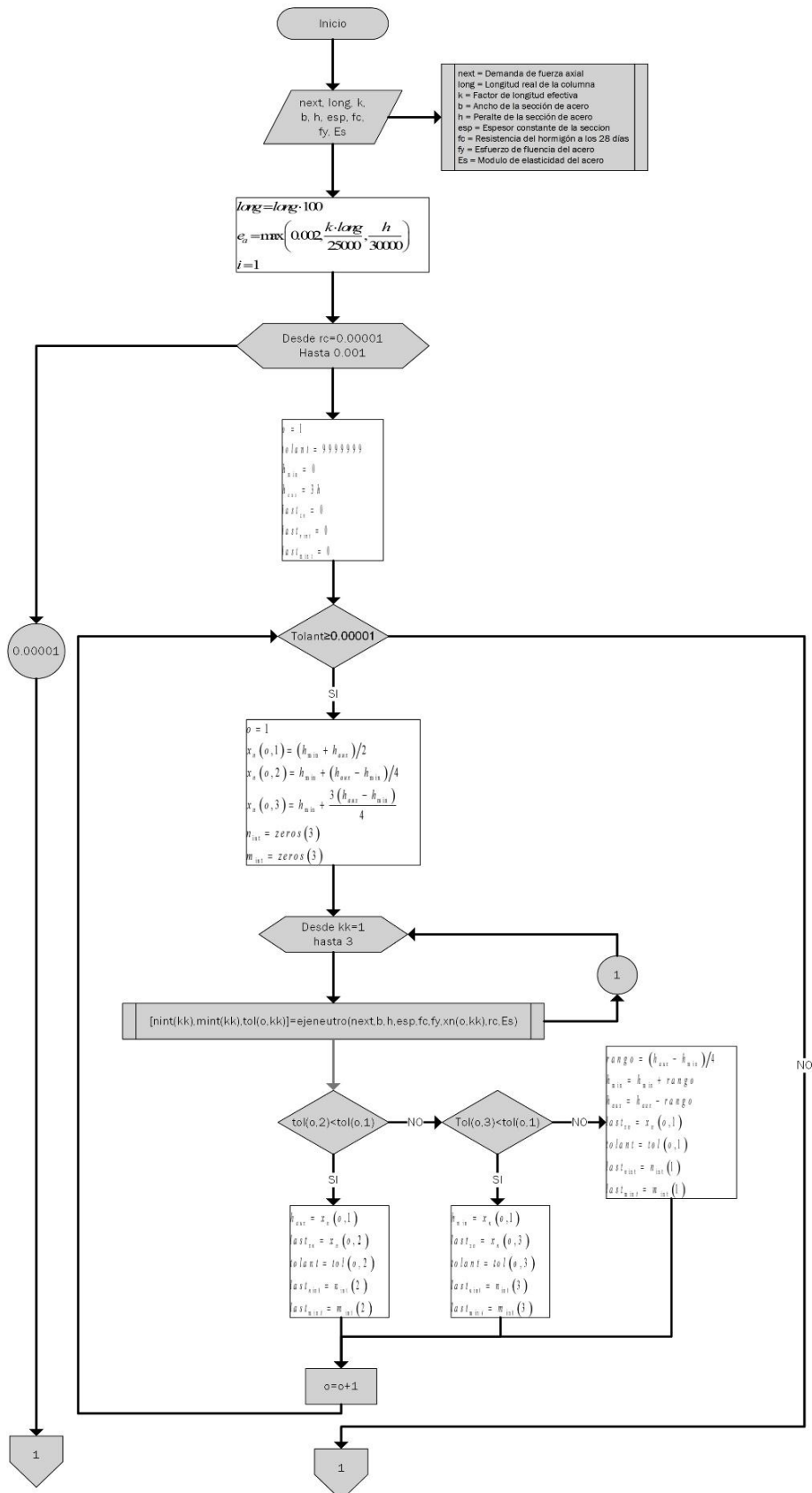


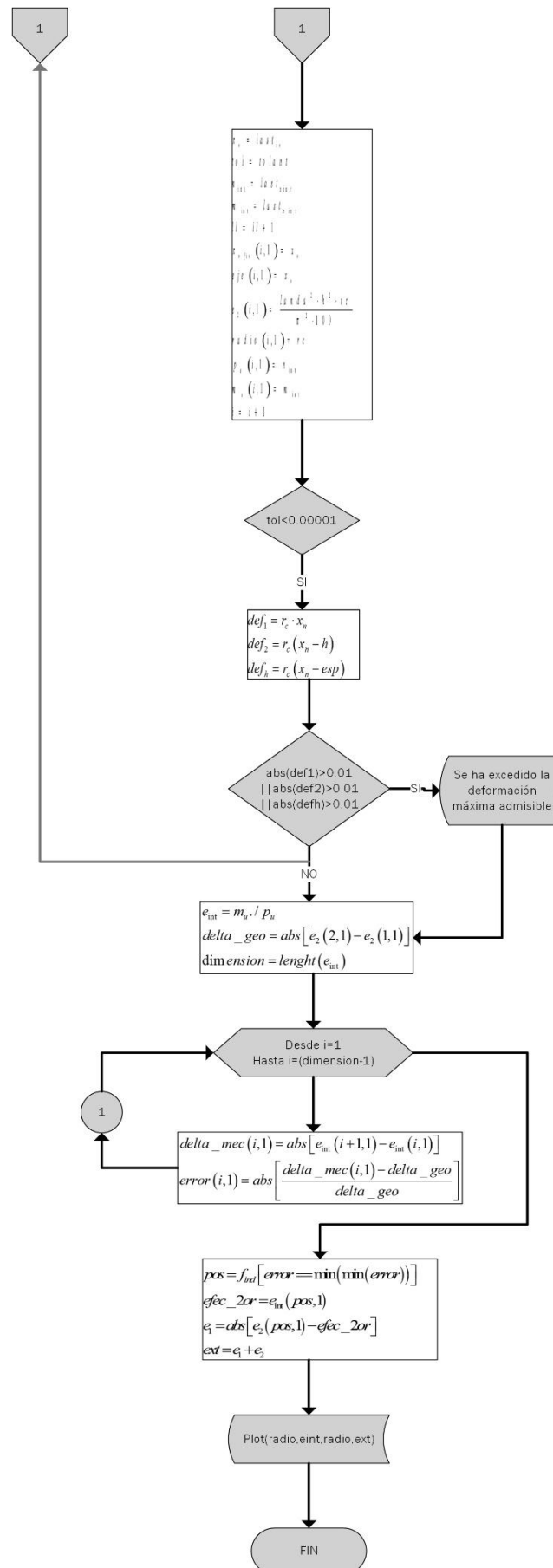
FUNCION PARA EL CÁLCULO DE LA FUERZA AXIAL Y MOMENTO TOTAL QUE PROPORCIONA LA SECCIÓN DE LA COLUMNA DE HORMIGÓN ARMADO INCLUYENDO EL ACERO DE REFUERZO



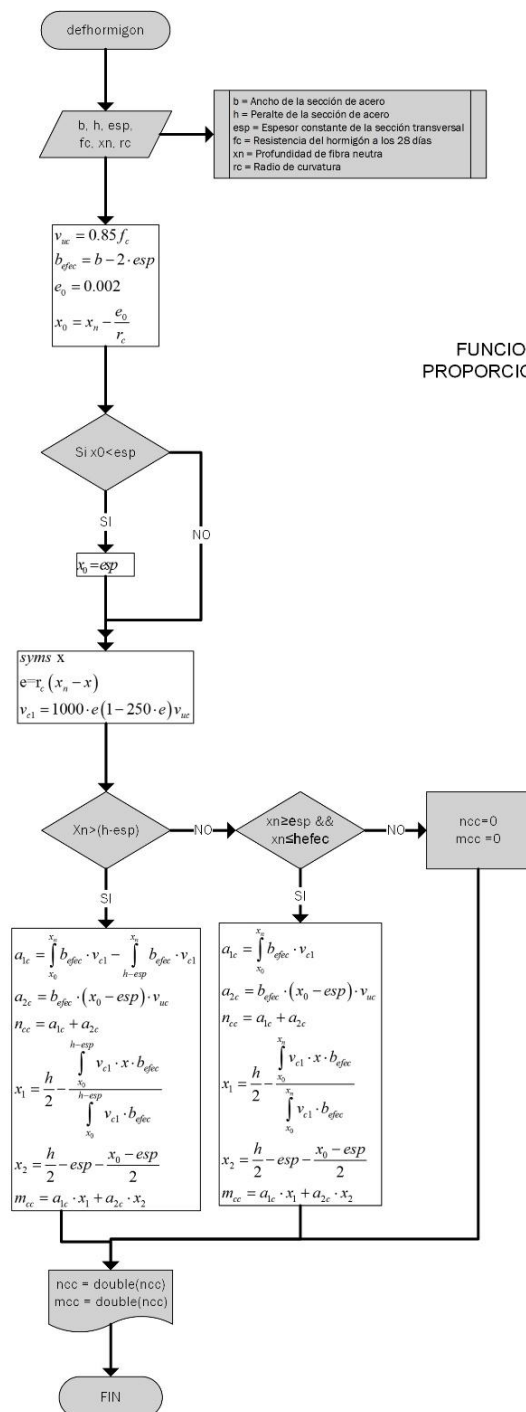
4.1.2 Diagramas de Flujo para columnas de acero rellenas de hormigón

FUNCION PARA EL CÁLCULO DE LA FUERZA AXIAL Y MOMENTO TOTAL QUE PROPORCIONA LA SECCIÓN DE LA COLUMNA DE ACERO RELLENA DE HORMIGÓN

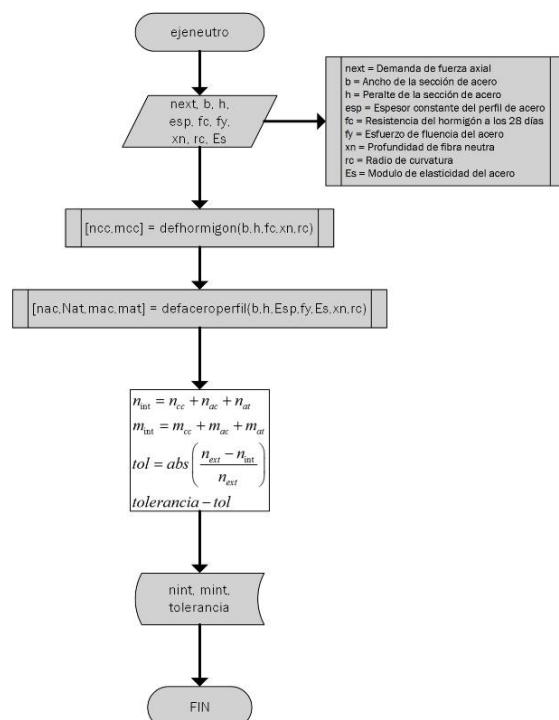




FUNCION PARA EL CÁLCULO DE LA FUERZA AXIAL Y MOMENTO QUE PROPORCIONA EL HORMIGÓN A LA SECCIÓN DE LA COLUMNA DE ACERO RELLENA DE HORMIGÓN



FUNCION PARA EL CÁLCULO DE LA FUERZA AXIAL Y MOMENTO TOTAL QUE PROPORCIONA LA SECCIÓN DE LA COLUMNA DE ACERO RELLENA DE HORMIGÓN



defacerperfil

b, h, esp, fy, Es, xn, rc

$v_{at} = f_y$
 $e_{yd} = \frac{v_{at}}{E_s}$
 $x_{0a} = x_n - \frac{e_{yd}}{r_c}$
 $x_{0b} = x_n + \frac{e_{yd}}{r_c}$

X0a < 0 (SI) → $x_{0a} = 0$
 (NO) → **X0a > h** (SI) → $x_{0a} = h$
 (NO) → **X0b > h** (SI) → $x_{0b} = h$
 (NO) → **X0b < 0** (SI) → $x_{0b} = h$
 (NO) → **sym y a c d**
 $e = r_c (x_n - y)$
 $x_{med} = \frac{d(2c+a)}{3(c+a)}$

Xn < 0 (SI) → **x0b ≥ (h-esp) && x0b ≤ h** (SI) → **Cálculo de naty mat CASO 1T (1)(2) Ver Anexo 5** → **nac = 0, mac = 0** → **1**
 (NO) → **x0b > esp && x0b < (h-esp)** (SI) → **Cálculo de naty mat CASO 1T (3) Ver Anexo 5** → **1**
 (NO) → **x0b ≥ 0 && x0b ≤ esp** (SI) → **Cálculo de naty mat CASO 1T (4)(5) Ver Anexo 5** → **1**
 (NO) → **1**

Caso 1T (xn < 0): Análisis a tracción

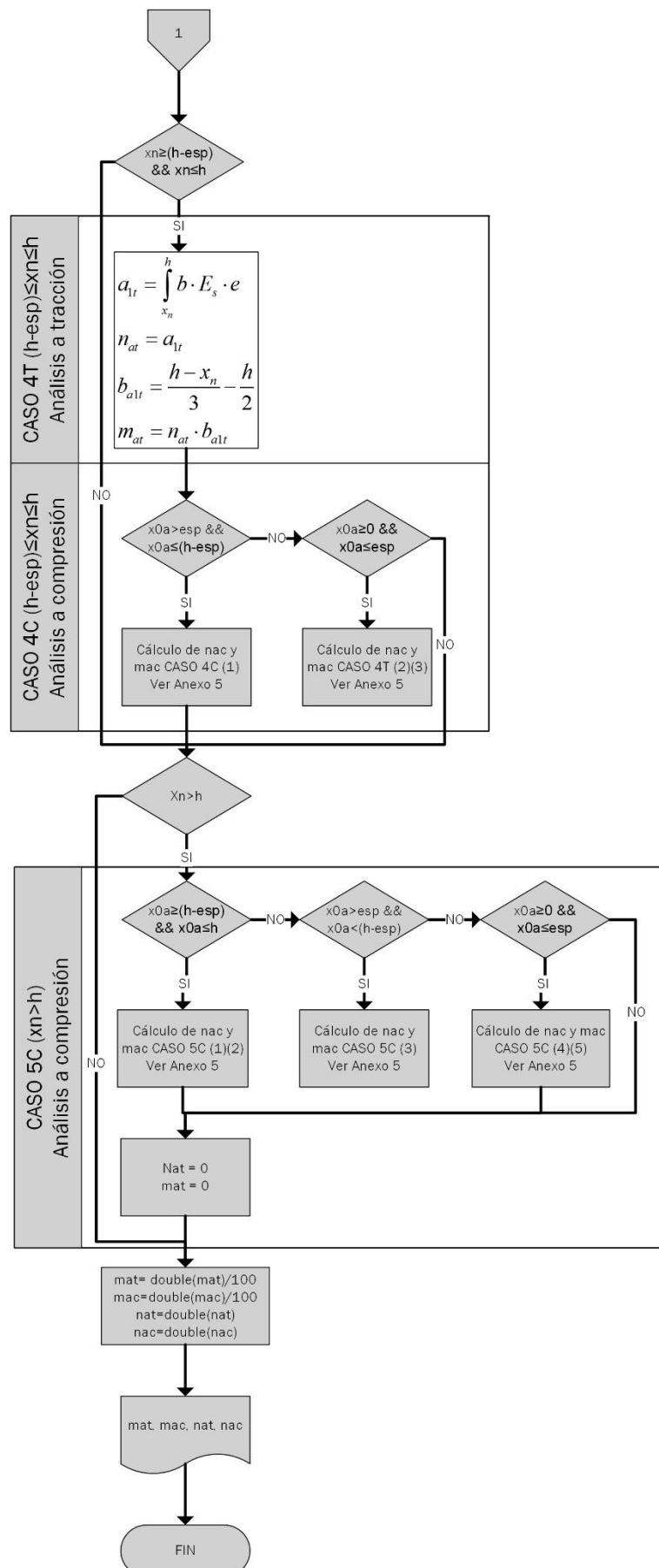
1

xn ≥ 0 && Xn ≤ esp (SI) → $a_{1c} = \int_0^{x_n} b \cdot F_s \cdot e$
 $n_{ac} = a_{1c}$
 $b_{a1c} = \frac{h}{2} \cdot \frac{x_n}{3}$
 $m_{ac} = N_{ac} \cdot b_{a1c}$
 (NO) → **x0b ≤ esp && x0b < (h-esp)** (SI) → **Cálculo de naty mat CASO 2T (2) (3) Ver Anexo 5** → **1**
 (NO) → **x0b ≥ (h-esp) && x0b ≤ h** (SI) → **Cálculo de naty mat CASO 2T (1)(2) Ver Anexo 5** → **1**
 (NO) → **xn > esp && xn ≤ (h-esp)** (SI) → **x0a ≥ 0 && x0a ≤ esp** (SI) → **Cálculo de nac y mac CASO 3T (1)(2) Ver Anexo 5** → **1**
 (NO) → **x0a > esp && x0a ≤ xn** (SI) → **Cálculo de nac y mac CASO 3C (3) Ver Anexo 5** → **1**
 (NO) → **x0b < (h-esp)** (SI) → **Cálculo de nac y mac CASO 3T (2) Ver Anexo 5** → **1**
 (NO) → **x0b ≥ (h-esp) && x0b ≤ h** (SI) → **Cálculo de nac y mac CASO 3T (1)(3) Ver Anexo 5** → **1**
 (NO) → **1**

Caso 2C (0 ≤ xn ≤ esp): Análisis a compresión

Caso 3C (esp ≤ xn ≤ (h-esp)): Análisis a compresión

Caso 3T (esp ≤ xn ≤ (h-esp)): Análisis a tracción



Capítulo 5 EJEMPLOS RESUELTOS

En este capítulo se realizará un ejemplo, para una columna de hormigón armado que se resolverá según el método propuesto por el código ACI 318-11 y mediante el algoritmo desarrollado; de igual manera para el caso de una columna de acero rellena de hormigón, el ejemplo se resolverá según el código AISC 360-10 y mediante el algoritmo desarrollado.

Para cada ejemplo se calcularán dos diagramas de interacción por cada método para la columna dada, en el primer diagrama no se considerarán los efectos de la esbeltez, mientras que en el segundo diagrama de interacción sí se consideran dichos efectos.

El método tiene un límite de aplicación definido en 3 veces el peralte de la sección, es decir, en el proceso iterativo la distancia máxima a la cual se encontrará el eje neutro será de $3h$ medido desde el extremo superior o inferior de la sección. Debido a esta limitación, para cargas axiales muy grandes o muy pequeñas, al resolver el método, se obtienen profundidades de fibra neutra muy alejadas de la sección en las primeras iteraciones con radios de curvatura pequeños, por lo que, se sobrepasa el límite establecido en el programa y no se calcula la profundidad de fibra neutra que haga que se dé el equilibrio entre el axial interno y el axial de la demanda.

5.1 Columna de hormigón armado según el código ACI318-11

En la tabla 5.1 se presentan los datos necesarios para analizar la columna de hormigón armado, su sección transversal se muestra en la Figura 5.1

DESCRIPCIÓN	SIMBOLOGÍA	VALOR
Ancho de la sección [cm]	b	40
Peralte de la sección [cm]	h	40
Recubrimiento [cm]	re	4
Longitud real de la columna [m]	L	5
Factor de longitud efectiva (k)	k	1
Varillas de acero cara superior	-	5
Diámetro de las varillas de acero [mm]	Ø	20
Varillas de acero cara inferior	-	5
Diámetro de las varillas de acero [mm]	Ø	20
Resistencia característica del hormigón a los 28 días [kg/cm ²]	f'c	240
Esfuerzo de fluencia del acero de refuerzo [kg/cm ²]	fy	4200
Módulo de elasticidad del hormigón [kg/cm ²]	Ec	200000
Módulo de elasticidad del acero de refuerzo [kg/cm ²]	Es	2000000

Tabla 5.1.- Datos de entrada para para la columna de hormigón.

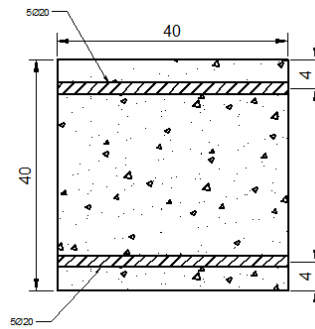


Figura 5.1.- Sección transversal de la columna de hormigón armado.

Lo primero que se hace es verificar si la columna es esbelta, para saber si es necesario tomar en cuenta los efectos de segundo orden producidos por deformada de la columna, usando la ecuación Ec [2.3.1] se obtiene:

$$\frac{k \cdot l_u}{r} = 41.67$$

Como $41.67 > 22$, se deben considerar los efectos de segundo orden en la columna. Se calcula el diagrama de interacción sin considerar efectos de esbeltez, los puntos de este diagrama se calculan usando una función creada en el programa Matlab (dia_itera.m) cuya codificación se encuentra en el Anexo 5H, algunos de los datos obtenidos con este programa se muestran en la Tabla 5.2, el diagrama de interacción se muestra en la Figura 5.2.

# DE DATO (dia_itera.m)	CARGA AXIAL [Kg]	MOMENTO MAXIMO [Kg*m]
4	22970	25284
8	70298	31844
15	124848	36530
17	138720	37064
20	172230	35391
25	233250	30595
30	286290	25603
33	315670	22291

Tabla 5.2.- Datos obtenidos con el programa dia_itera.m

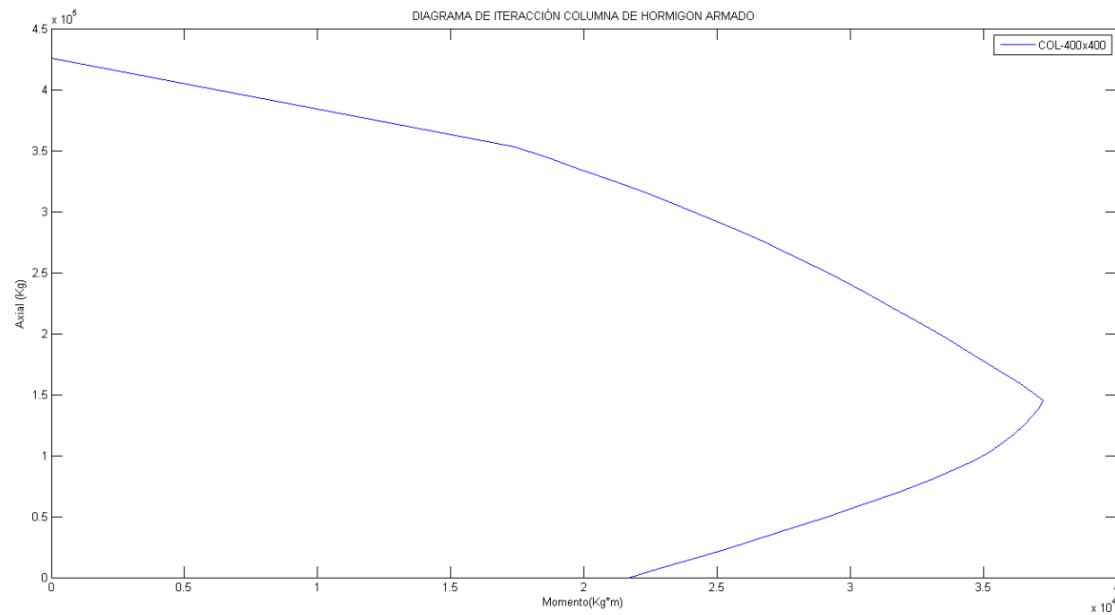


Figura 5.2.- Diagrama de Interacción columna de hormigón sin considerar efectos de esbeltez (Método ACI)

Debido a que la columna es esbelta, el ACI318-11 propone el método de amplificación de momentos para el análisis (Sección 2.4.1), por lo tanto, se mayor el momento en cada punto del diagrama de interacción, mediante el cálculo de un factor de amplificación del momento (δ) (Ec [2.3.6]) donde EI se calculó usando la Ec [2.3.8] sin considerar la reducción del 25% de la carga crítica de Euler, ni la fluencia prematura del acero, debido a que, es un problema de comprobación mas no de diseño; los resultados obtenidos de estas ecuaciones son:

$$EI = 19961872564.1 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 \cdot 19961872564.1}{(1 \cdot 500)^2} = 788063.1 \text{ [kg]}$$

$$\delta = \frac{1}{1 - \frac{P_u}{788063.1}}$$

Para la construcción del diagrama de interacción se calculó el factor de amplificación (δ) para varias fuerzas axiales; en la Tabla 5.3 se presentan estas fuerzas axiales, sus respectivos factores de amplificación del momento y el momento máximo que resiste la columna por inestabilidad.

# DE DATO EN dia_itera	CARGA AXIAL [Kg]	MOMENTO MÁXIMO AGOTAMIENTO [kg.m]	FACTOR DE MAYORACION (δ)	MOMENTO MÁXIMO INESTABILIDAD [kg.m]
4	22970	25284	1.030	24547.0
6	48810	29030	1.066	27232.0
8	70298	31844	1.098	29003.4
10	89443	34047	1.128	30182.8
12	104040	35287	1.152	30628.4
16	131784	36827	1.201	30668.6
18	145656	37243	1.227	30359.5
20	172230	35391	1.280	27656.4
25	233250	30595	1.420	21539.5
30	286290	25603	1.571	16301.9
33	315670	22291	1.668	13362.0

Tabla 5.3.- Datos usados para la construcción de diagrama de interacción por inestabilidad según el código ACI 318-11

El diagrama de interacción debido a la inestabilidad construido con los datos de la Tabla 5.3, se muestra en la Figura 5.3

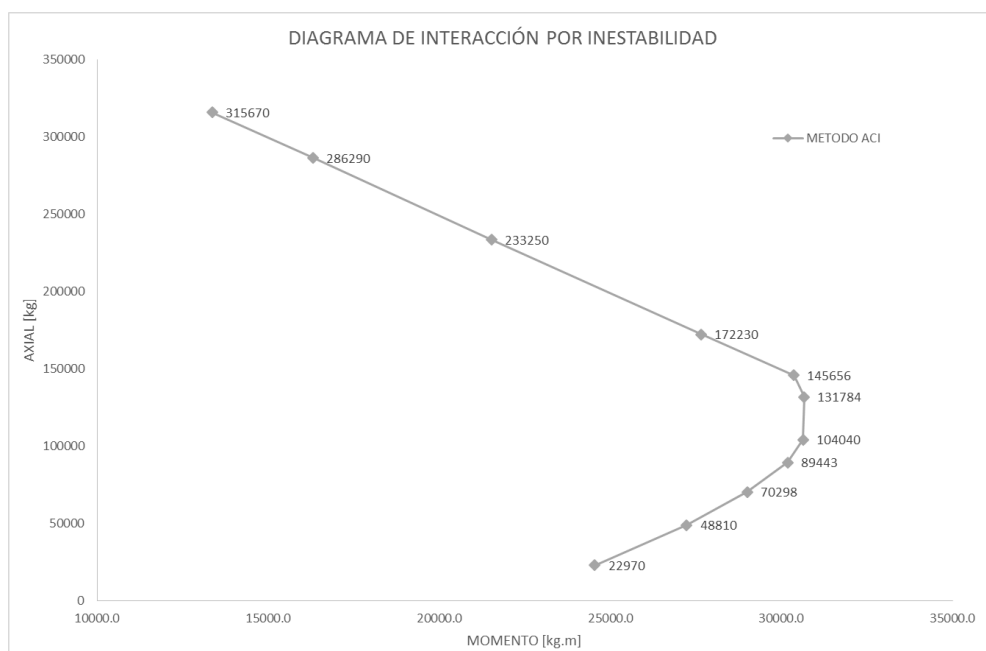


Figura 5.3.- Diagrama de interacción por inestabilidad según el código ACI 318 11

5.2 Columna de hormigón armado según la metodología propuesta

Para el cálculo del diagrama de interacción sin considerar los efectos de la esbeltez de la columna según la metodología propuesta, se obtuvieron los puntos finales de la directriz mecánica (punto de agotamiento de la sección) para diferentes valores de cargas axiales, es decir, se obtiene una

excentricidad máxima para la fuerza axial dada, con la cual se obtiene el momento flector máximo que puede resistir la sección, donde cada uno de estos puntos representan un punto del diagrama de interacción, cómo se observa esquemáticamente en la Figura 3.11. En la Tabla 5.4 se presentan varias cargas axiales, la excentricidad máxima y el momento flector correspondiente.

# DE DATO (dia_itera.m)	CARGA AXIAL [Kg]	EXCENTRICIDAD MAXIMA [m]	MOMENTO MAXIMO
4	22970	1.099	25244.0
8	70298	0.4553	32006.7
15	124848	0.2906	36280.8
17	138720	0.2649	36746.9
20	172230	0.2034	35031.6
25	233250	0.1278	29809.4
30	286290	0.0859	24592.3
33	315670	0.06724	21225.7

Tabla 5.4.- Datos usados para la construcción del diagrama de interacción por agotamiento según la metodología propuesta (Columna de hormigón)

A continuación se muestran las directrices mecánicas obtenidas para algunas de las fuerzas axiales con su respectiva excentricidad máxima de la Tabla 5.4.

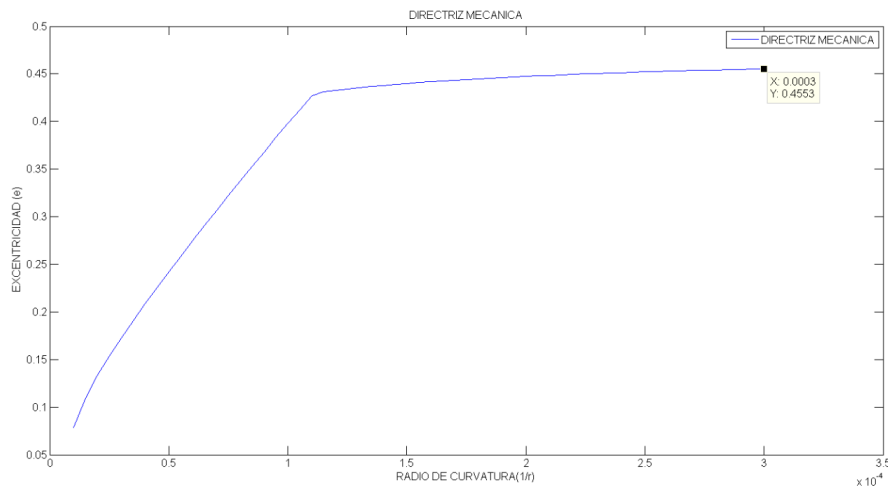


Figura. 5.1.- Directriz mecánica para un axial $N=70298$ (Columna de hormigón)

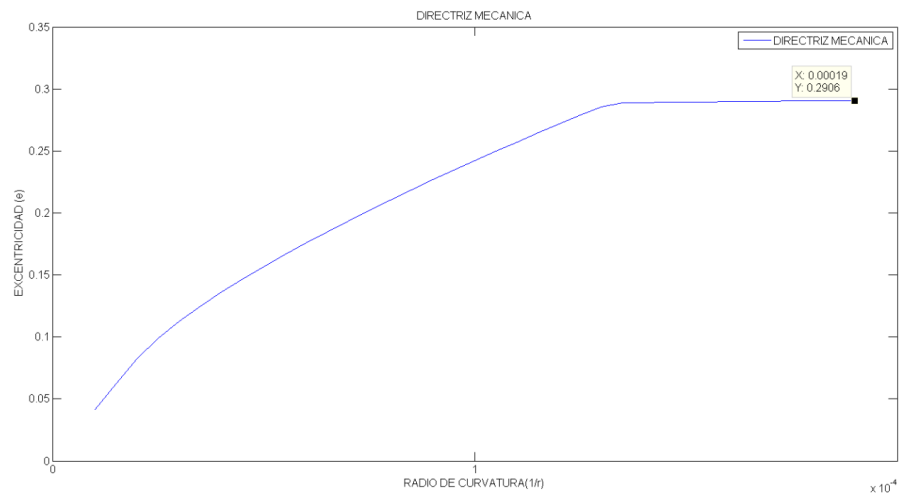


Figura. 5.2.- Directriz mecánica para un axil $N=124848$ (Columna de hormigón)

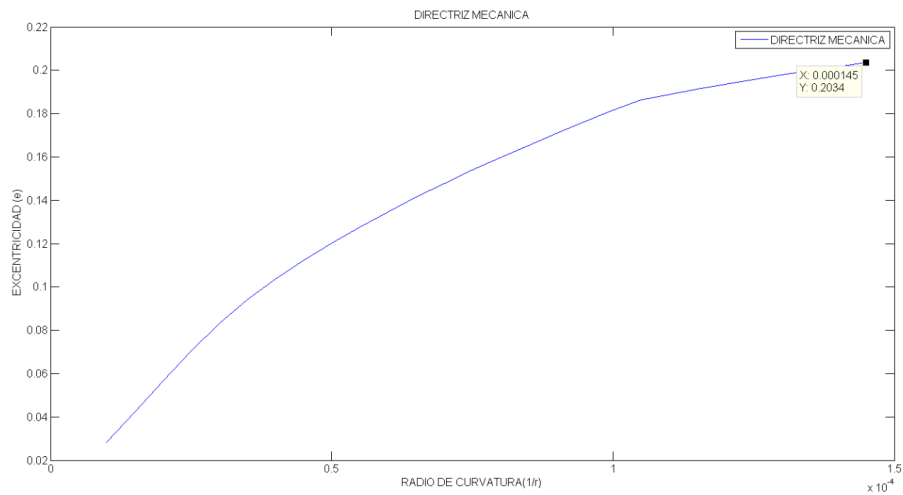


Figura. 5.3.- Directriz mecánica para un axil $N=172230$ (Columna de hormigón)

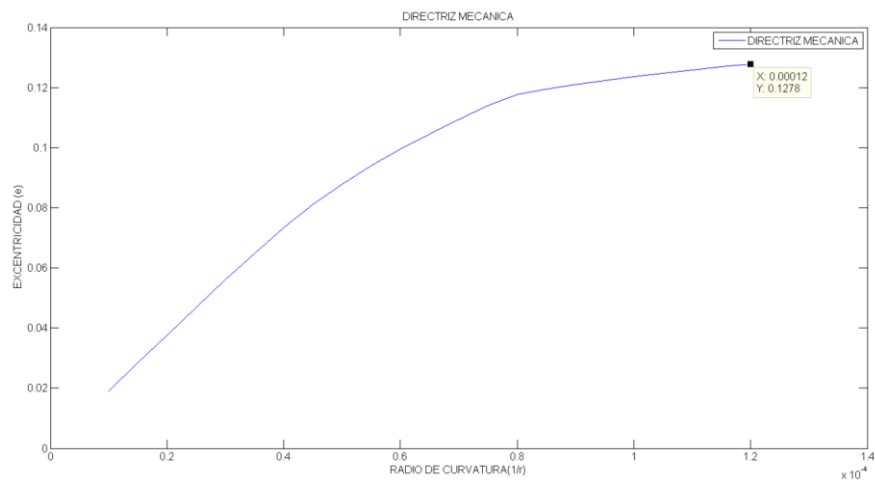


Figura. 5.4.- Directriz mecánica para un axil $N=233250$ (Columna de hormigón)

El diagrama de interacción obtenido con los puntos últimos de las directrices mecánicas para las fuerzas axiales de la Tabla 5.4 se muestra en la Figura 5.4

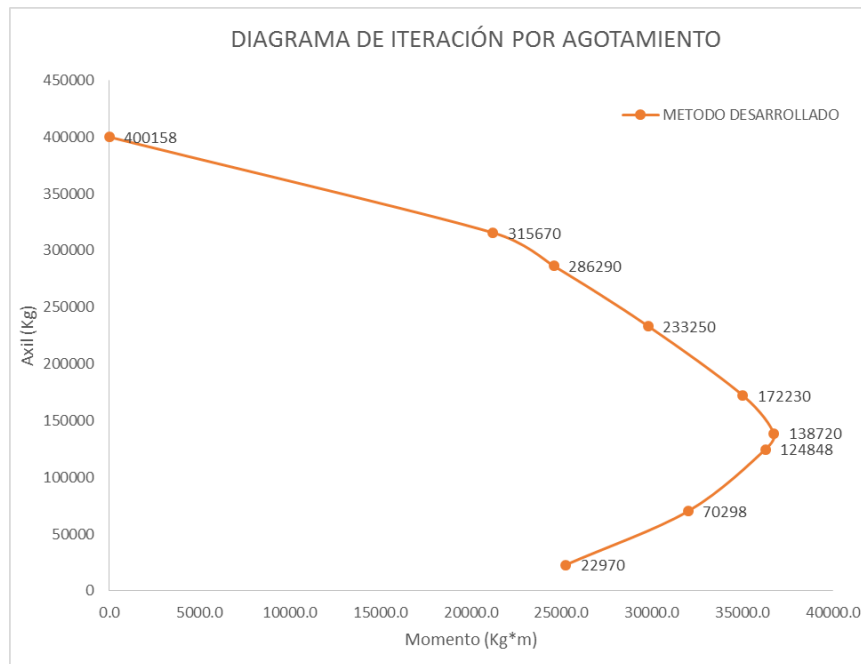


Figura 5.4.- Diagrama de interacción por agotamiento obtenido mediante la metodología propuesta (Columna de hormigón)

Para el cálculo de los puntos del diagrama de interacción por inestabilidad, se realiza una reducción de la capacidad utilizando el punto de tangencia entre la directriz mecánica y geométrica como punto de excentricidad máxima; como se conoce la pendiente de la directriz geométrica, se determina la excentricidad de primer orden para las condiciones dadas; y de esta forma se puede obtener el momento máximo por inestabilidad que podrá soportar la columna. En la Tabla 5.5 se presentan diferentes cargas axiales para las cuales se realizó la reducción por inestabilidad, la excentricidad y el radio de curvatura del punto de tangencia entre las directrices.

# DE DATO EN (dia_itera.m)	CARGA AXIAL [Kg]	EXCENTRICIDAD MAXIMA (PUNTO DE TANGENCIA) [m]	RADIO DE CURVATURA [m]	MOMENTO MAXIMO INCLUYENDO EFECTOS DE 2DO ORDEN [Kg*m]	EXCENTRICIDAD 1ER ORDEN [m]	MOMENTO MAXIMO DE LA DEMANDA [kg.m]
4	22970	1.0770	0.015	24738.7	1.0390	23865.9
6	48810	0.5741	0.013	28021.8	0.5412	26414.5
8	70298	0.4355	0.013	30614.8	0.4026	28299.9
10	89443	0.3658	0.013	32718.2	0.3329	29772.9
12	104040	0.3286	0.013	34187.5	0.2957	30761.6
16	131784	0.2759	0.014	36359.2	0.2404	31685.8
18	145656	0.2518	0.015	36676.2	0.2138	31141.9
20	172230	0.2016	0.014	34721.6	0.1661	28613.9
25	233250	0.1209	0.009	28199.9	0.0981	22882.5
30	286290	0.0801	0.007	22943.3	0.0624	17867.0
33	315670	0.0610	0.006	19265.3	0.0458	14467.7

Tabla 5.5.- Datos usados para la construcción del diagrama de interacción por inestabilidad según la metodología propuesta (Columna de hormigón).

A continuación se muestran las directrices mecánicas y su punto de tangencia con la directriz geométrica para algunas de las fuerzas axiales de la Tabla 5.4.

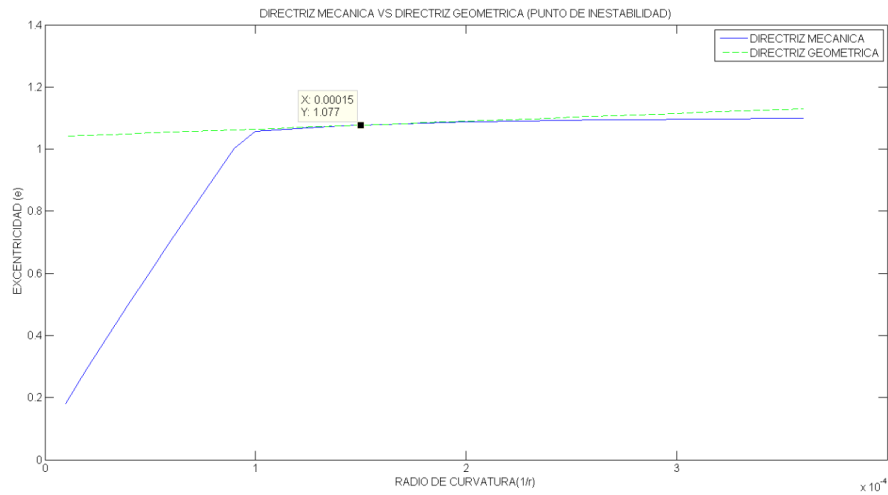


Figura 5.5.- Directriz mecánica vs directriz geométrica para un axil $N=22970$ kg (Columna de hormigón)

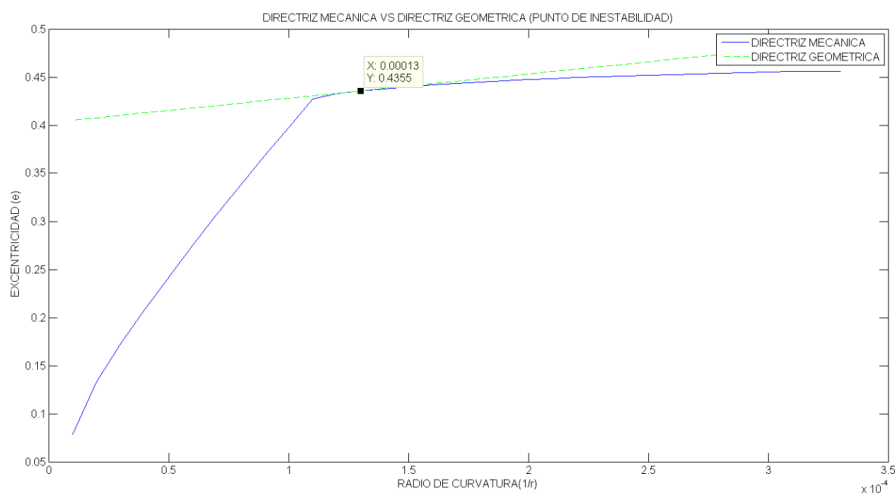


Figura 5.6.- Directriz mecánica vs directriz geométrica para un axil $N=70298$ (Columna de hormigón)

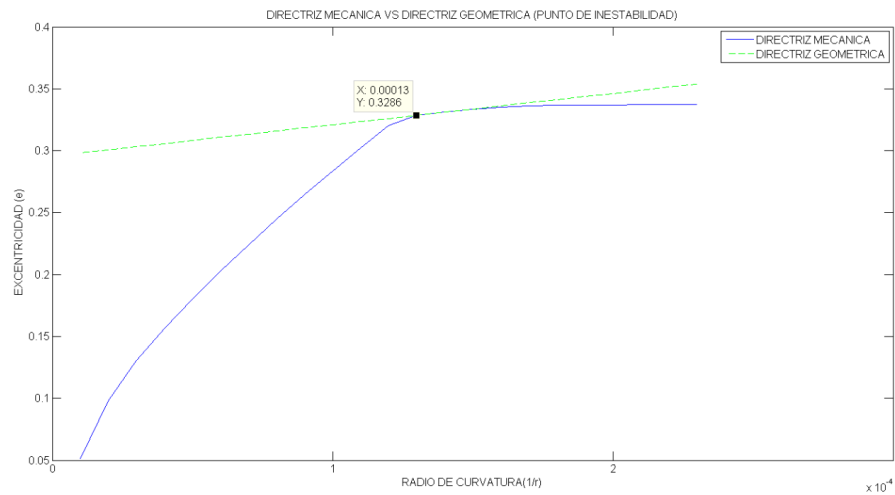


Figura 5.7.- Directriz mecánica vs directriz geométrica para un axil N= 104040 (Columna de hormigón)

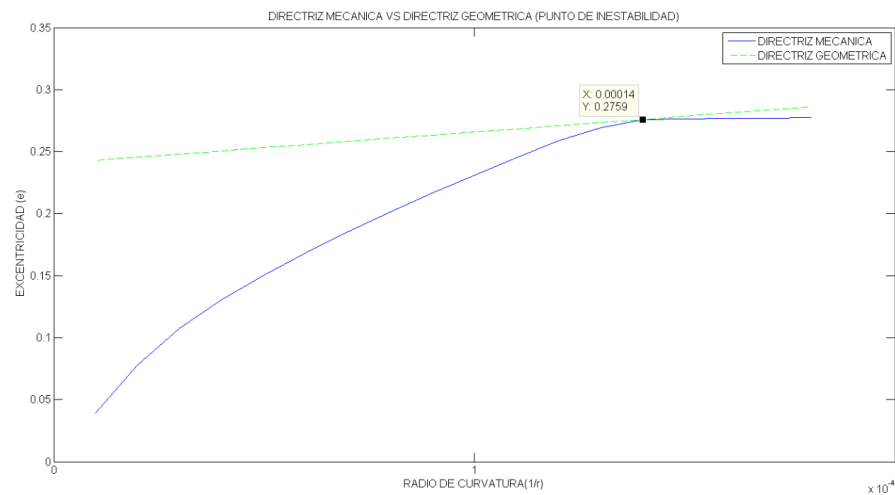


Figura 5.8.- Directriz mecánica vs directriz geométrica para un axil N=131784 (Columna de hormigón)

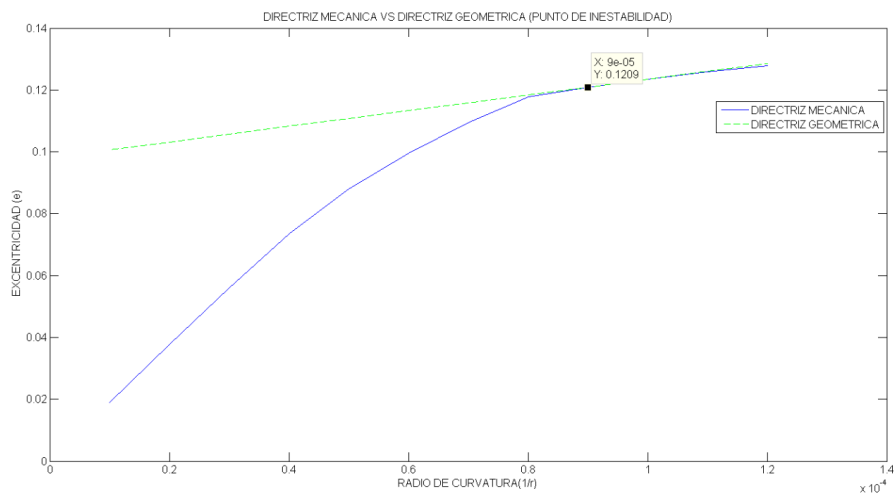


Figura 5.9.- Directriz mecánica vs directriz geométrica para un axil N=233250 (Columna de hormigón)

Una vez que se conoce el momento máximo de la demanda que puede soportar la columna por inestabilidad (Tabla 5.5), para las diferentes cargas axiales se puede construir el diagrama de interacción por inestabilidad, para este ejemplo dicho diagrama se muestra en la Figura 5.10

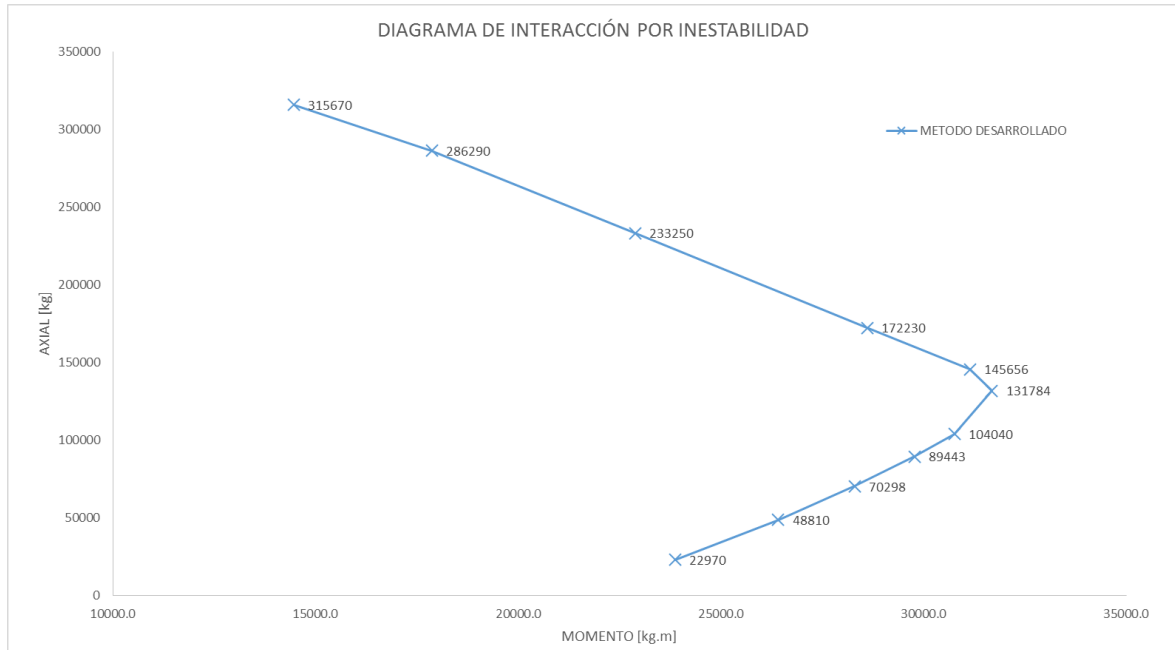


Figura 5.10.- Diagrama de interacción por inestabilidad según la metodología desarrollada (Columna de hormigón)

5.3 Columna de acero rellena de hormigón según el código AISC360-10

La columna analizada como ejemplo será una columna armada rellena de hormigón, con sección formada por 2C-300X100X12, que son perfiles comerciales en nuestro medio; en la Tabla 5.6 se presentan los datos de entrada para la columna de acero rellena de hormigón, la sección transversal de la columna se muestra en la Figura 5.11

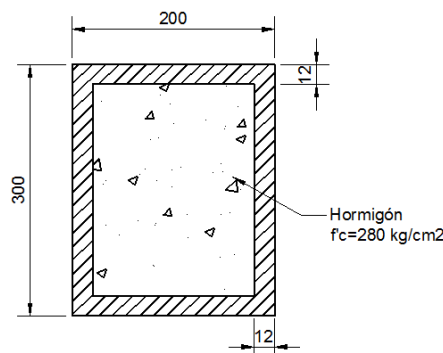


Figura 5.11.- Sección transversal de la columna de acero rellena de hormigón.

DESCRIPCIÓN	SIMBOLOGÍA	VALOR
Ancho de la sección [cm]	b	20
Peralte de la sección [cm]	h	30
Longitud real de la columna [m]	L	8.2
Factor de longitud efectiva	k	1.5
Espesor del perfil [mm]	esp	12
Resistencia característica del hormigón a los 28 días [kg/cm ²]	f' _c	280
Esfuerzo de fluencia del acero GR50 [kg/cm ²]	f _y	3500
Módulo de elasticidad del hormigón [kg/cm ²]	E _c	200000
Módulo de elasticidad del acero [kg/cm ²]	E _s	2000000

Tabla 5.6.- Datos de entrada para la columna de acero rellena de hormigón.

Al igual que para el caso del hormigón, lo primero que se debe hacer es verificar si a la columna se la puede considerar como esbelta, sustituyendo los datos de este ejemplo en la Ec [2.3.9] se obtiene:

$$\frac{1.5 \cdot 8.2 \cdot 100}{10.9} > 4.71 \sqrt{\frac{2000000}{3500}}$$
$$112.844 > 112.59$$

Para el cálculo del radio de giro de la sección, se transformó el área de hormigón en un área equivalente de acero distribuida uniformemente en todo el perfil aumentando el espesor de la sección.

Como la columna cumple con la ecuación Ec [2.3.9] se la considera esbelta, por lo que se deberán calcular los efectos de segundo orden que esta produce.

Para calcular el diagrama de interacción considerando efectos de pandeo, es necesario calcular primero el diagrama de interacción sin considerar dichos efectos usando las ecuaciones de la Sección 2.4.2 de esta tesis y el Anexo 4. Una vez que se tiene el diagrama de interacción de la sección, se hace la reducción por pandeo de las fuerzas axiales que estén sometidas a compresión, obteniéndose los mismos momentos (M_i) que se obtuvieron para el diagrama de interacción sin considerar el pandeo pero con axiales considerablemente menores debido al pandeo. Para esta tesis la obtención de estos diagramas se realizó usando una función creada en Matlab (interacciona.m) cuya codificación se adjunta en el Anexo 5I, algunos de los datos obtenidos con este programa se muestran en la Tabla 5.7, los diagramas de interacción obtenidos con esta función se muestran en la Figura 5.14.

# DE DATO (interacciona.m)	CARGA AXIAL [Kg]	EXCENRICIDAD MAXIMA [m]	MOMENTO MAXIMO [Kg*m]
148	49410	0.8892	43935.372
162	80930	0.5412	43799.316
196	152260	0.2737	41673.562
210	181640	0.2208	40106.112
220	202630	0.1911	38722.593
250	265590	0.1248	33145.632
270	307570	0.09123	28059.6111

Tabla 5.7.- Datos obtenidos con el programa interacciona.m

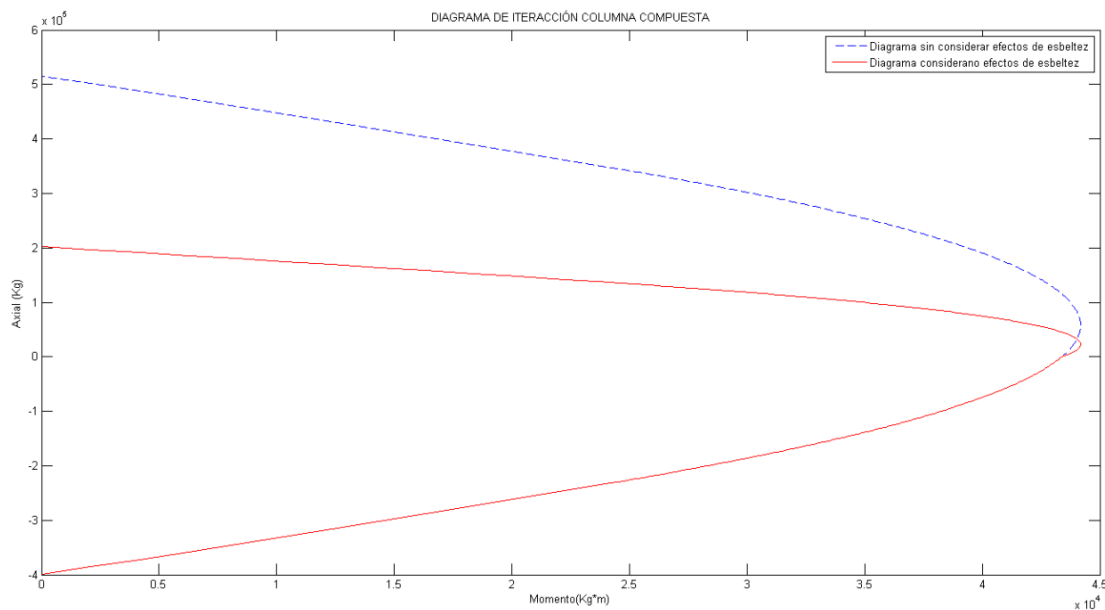


Figura 5.12.- Diagramas de interacción sin considerar efectos de segundo orden (Columna de acero).

De la misma manera que para la columna de hormigón, el código AISC 360-10 da un factor de reducción de la capacidad β_1 Ec [2.3.15], para el cálculo del momento máximo por inestabilidad que resiste una columna para una determinada carga axial.

$$EI_{effe} = 35340156351.3 \text{ [kg cm}^2\text{]}$$

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 \cdot 35340156351.3}{(1.5 \cdot 820)^2} = 184437 \text{ [kg]}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{1 - \frac{P_u}{184437}}$$

En la Tabla 5.8 se presentan diferentes cargas axiales para las cuales se calculó el momento máximo por agotamiento, factor de reducción por inestabilidad β_1 , y el momento máximo por inestabilidad.

# DE DATO EN interacciona.m	CARGA AXIAL [Kg]	MOMENTO MÁXIMO AGOTAMIENTO [kg.m]	FACTOR DE MAYORACION (β)	MOMENTO MÁXIMO INESTABILIDAD [kg.m]
124	1135.7	43412	1.006	43144.7
125	3234.6	43468	1.018	42705.7
130	13729	43715	1.080	40461.0
135	24223	43909	1.151	38142.2
140	34718	44051	1.232	35758.9
160	76695	44093	1.712	25757.7
180	118670	43295	2.804	15438.2
190	139660	42581	4.119	10337.7
200	160650	41658	7.754	5372.7

Tabla 5.8.- Datos usados para la construcción del diagrama de interacción por inestabilidad según el código AISC 360-10 (Columna de acero)

El diagrama de interacción debido a la inestabilidad construido con los datos de la Tabla 5.8 se muestra en la Figura 5.13

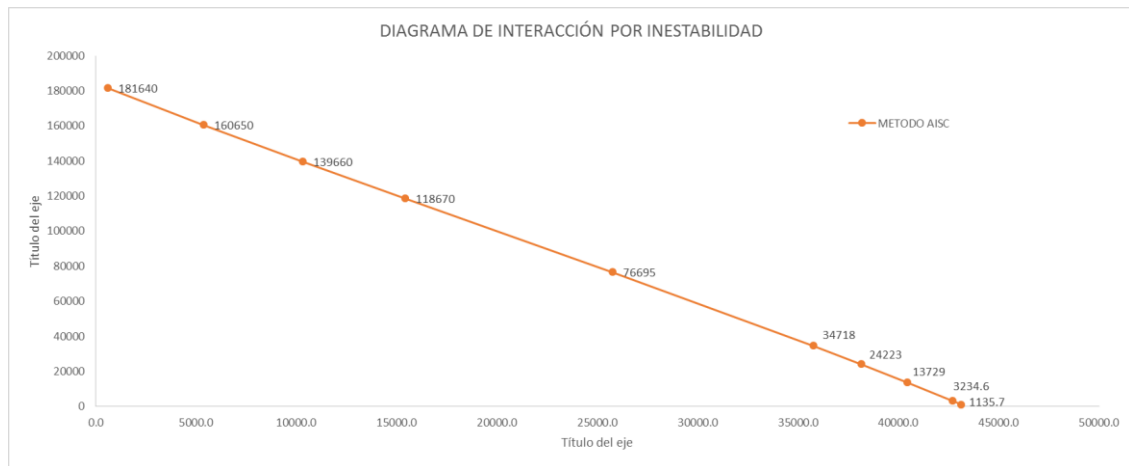


Figura 5.13.- Diagrama de interacción por inestabilidad según el AISC 360-10 (Columna de acero)

5.4 Columna de acero rellena de hormigón según la metodología propuesta

El ejemplo desarrollado será el mismo que el realizado mediante el AISC 360-10 (Sección 5.3), los datos y la sección transversal de la columna se presentan en la Tabla 5.6 y en la Figura 5.11 respectivamente.

Al igual que en ejemplo anterior, lo primero que se hará es obtener el diagrama de interacción sin considerar efectos de la esbeltez, para lo cual se realiza el mismo proceso que en la Sección 5.2, en la Tabla 5.9 se presentan varias cargas axiales, la excentricidad máxima y el momento flector correspondiente.

# DE DATO (interacciona.m)	CARGA AXIAL [Kg]	EXCENTRICIDAD MAXIMA [m]	MOMENTO MAXIMO [Kg*m]
148	49410	0.8892	43935.372
162	80930	0.5412	43799.316
196	152260	0.2737	41673.562
210	181640	0.2208	40106.112
220	202630	0.1911	38722.593
250	265590	0.1248	33145.632
270	307570	0.09123	28059.6111

Tabla 5.9.- Datos usados para la construcción del diagrama de interacción por agotamiento según la metodología propuesta (Columna de acero)

A continuación se muestran las directrices mecánicas obtenidas para algunas de las fuerzas axiales con su respectiva excentricidad máxima de la Tabla 5.9

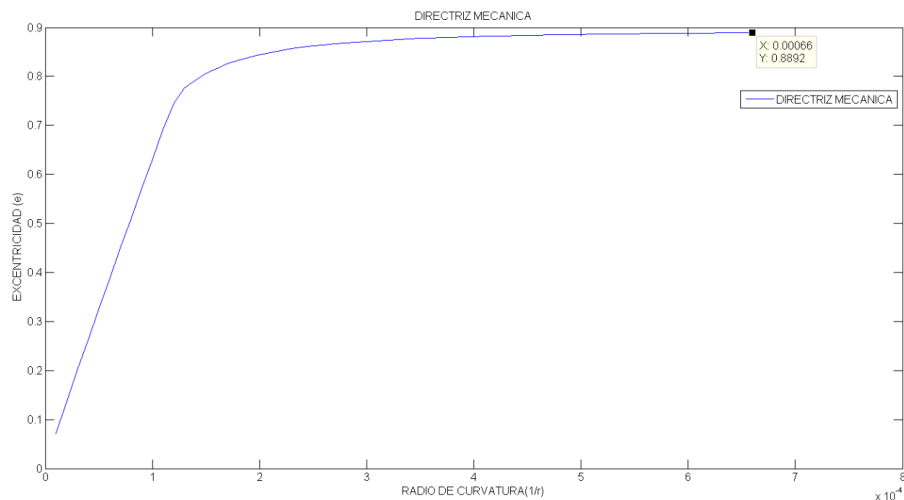


Figura 5.14.-Directriz mecánica para un axial N=49410 (Columna de acero)

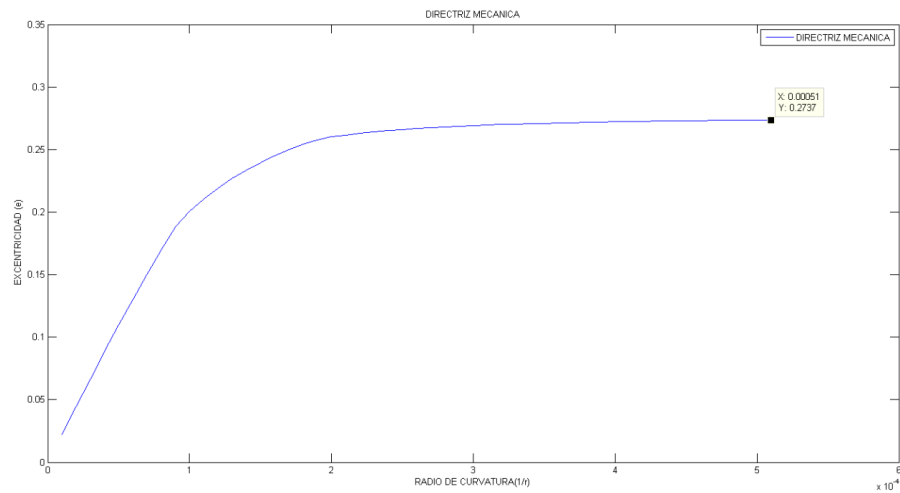


Figura 5.15.- Directriz mecánica para un axial $N=152260$ (Columna de acero)

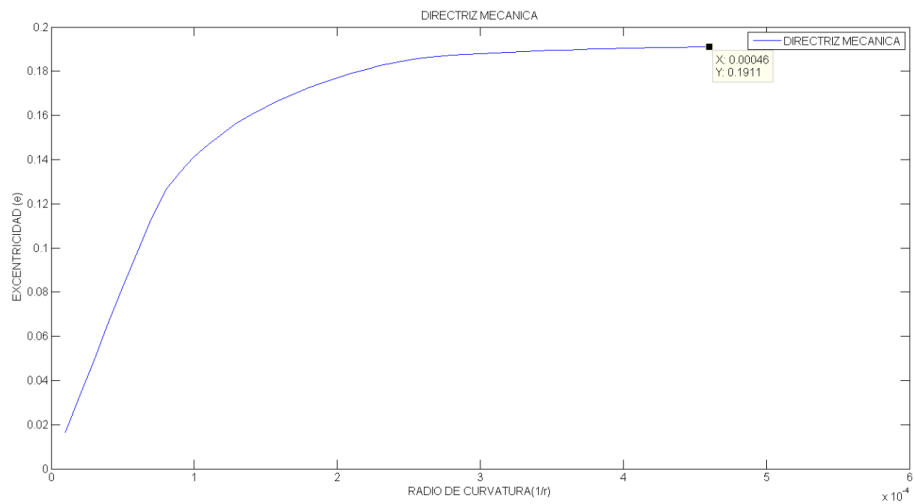


Figura 5.16.- Directriz mecánica para un axial $N=202630$ (Columna de acero)

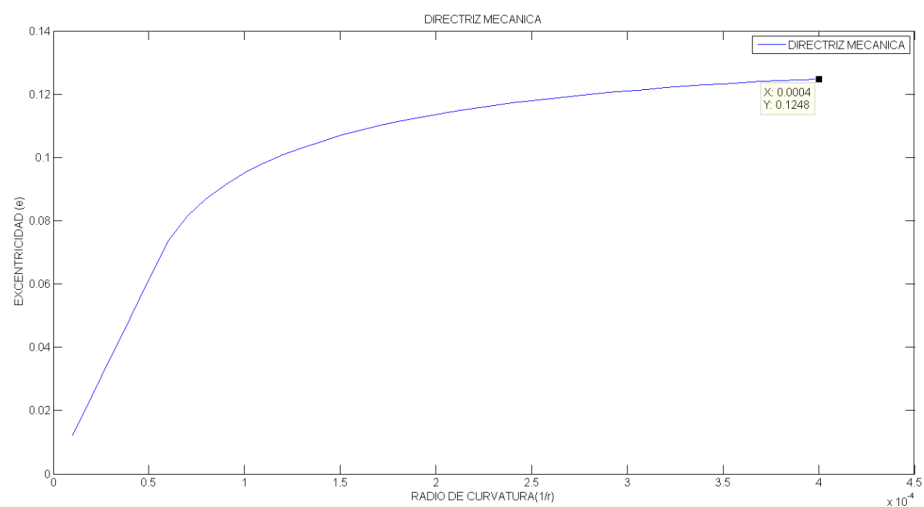


Figura 5.17. Directriz mecánica para un axial $N=265590$ (Columna de acero)

El diagrama de interacción por agotamiento de la sección, obtenido con los puntos últimos de las directrices mecánicas se muestra en la Figura 5.18

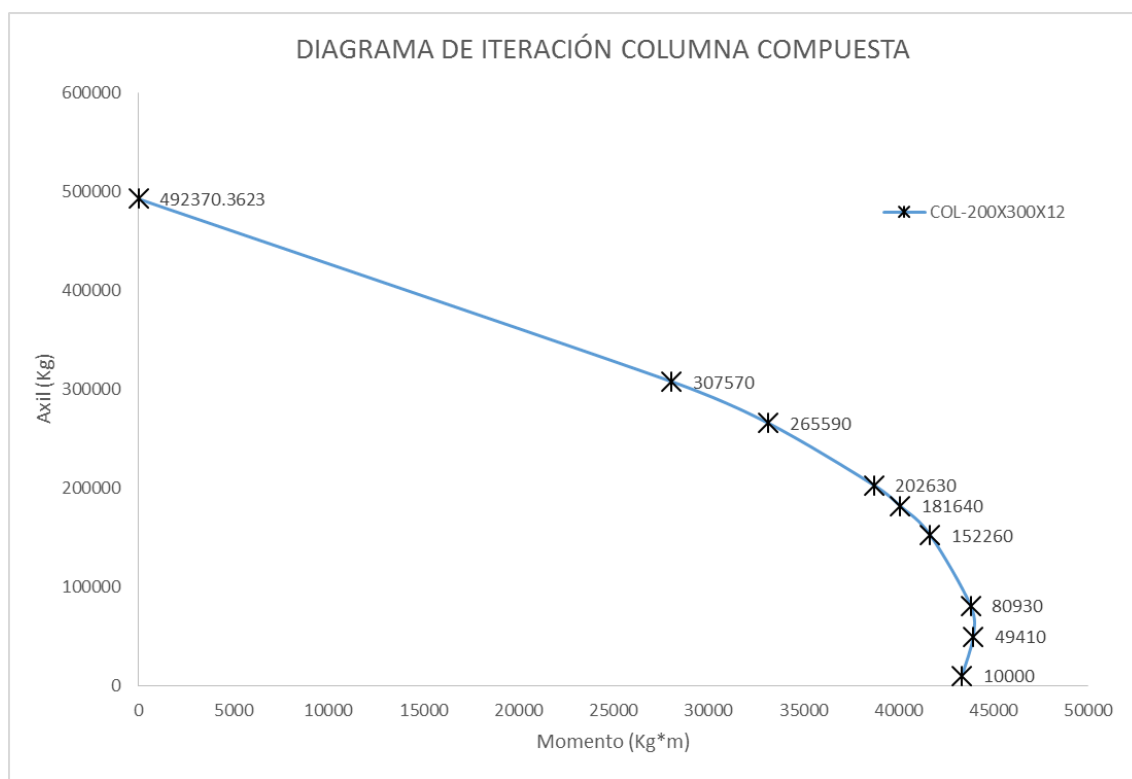


Figura 5.18.- Diagrama de interacción por agotamiento obtenido mediante la metodología propuesta (Columna de acero)

Para el cálculo del diagrama de interacción por inestabilidad (considerando efectos de esbeltez), al igual que para el diagrama de interacción de la Figura 5.18 se realiza el mismo procedimiento que el usado en el caso de la columna de hormigón (Sección 5.2)

En la Tabla 5.10 se presentan las diferentes cargas axiales para las cuales se realizó la reducción por inestabilidad.

# DE DATO EN (interacciona.m)	CARGA AXIAL [Kg]	EXCENTRICIDAD MAXIMA (PUNTO DE TANGENCIA) [m]	RADIO DE CURVATURA [m]	MOMENTO MAXIMO INCLUYENDO EFECTOS DE 2DO ORDEN [Kg.m]	EXCENTRICIDAD 1ER ORDEN [m]	MOMENTO MÁXIMO DE LA DEMANDA [kg.m]
124	1135.7	37.8500	0.048	42986.2	37.1142	42150.6
125	3234.6	13.1800	0.034	42632.0	12.6588	40946.2
130	13729	3.0220	0.021	41489.0	2.7001	37069.6
135	24223	1.6730	0.017	40525.1	1.4124	34212.8
140	34718	1.1440	0.015	39717.4	0.9141	31734.6
160	76695	0.5072	0.014	38899.7	0.2926	22440.6
180	118670	0.2801	0.011	33239.5	0.1115	13229.6
190	139660	0.2213	0.010	30906.8	0.0680	9498.4
200	160650	0.1610	0.008	25864.7	0.0384	6164.0
210	181640	0.1261	0.007	22904.8	0.0188	3414.4

Tabla 5.10.- Datos usados para la construcción del diagrama de interacción por inestabilidad según la metodología propuesta (Columna de acero).

A continuación se muestran las directrices mecánicas y su punto de tangencia con la directriz geométrica para algunas de las fuerzas axiales de la Tabla 5.10.

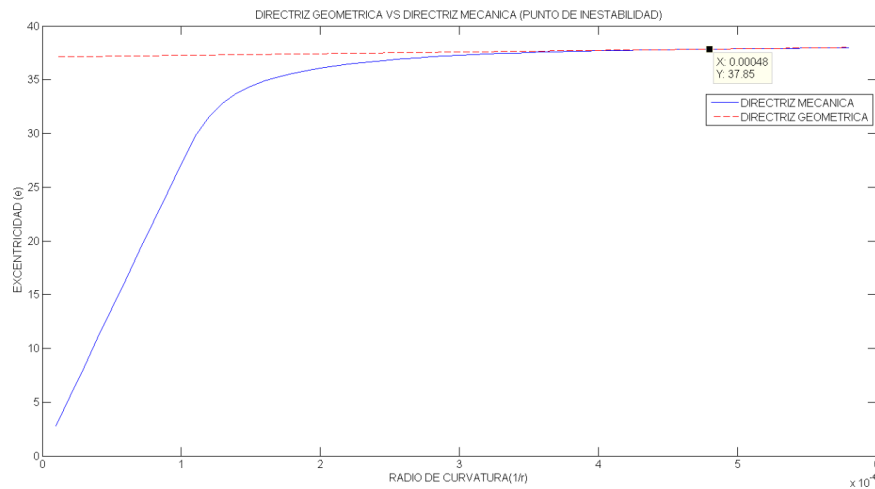


Figura 5.19.- Punto de inestabilidad para $N=1135.7 \text{ kg}$

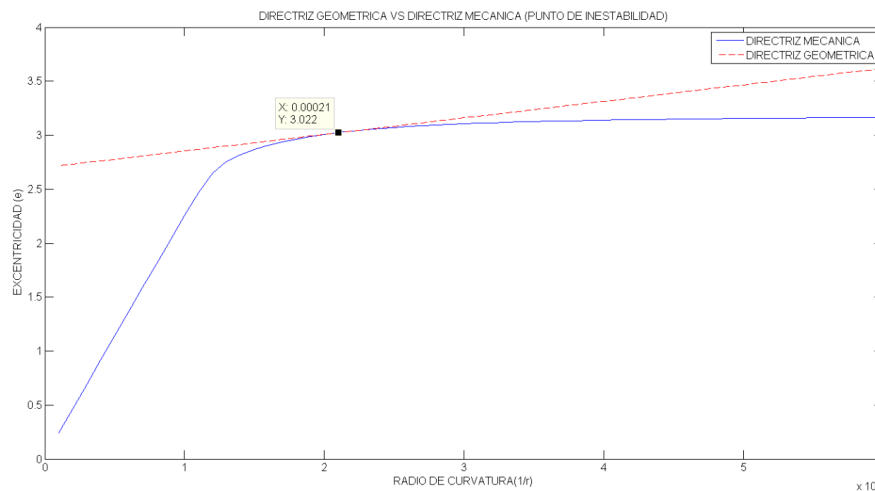


Figura 5.20.- Punto de inestabilidad para $N=13729 \text{ kg}$

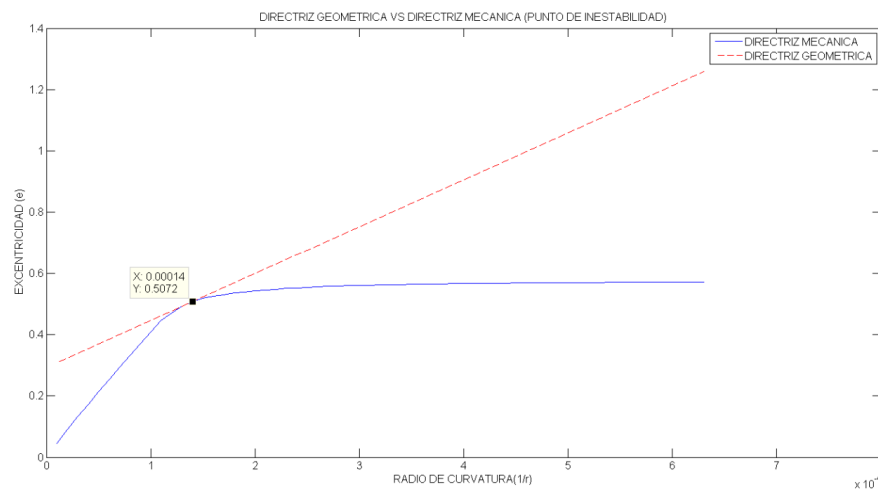


Figura 5.21.- Punto de inestabilidad para $N=76695 \text{ kg}$

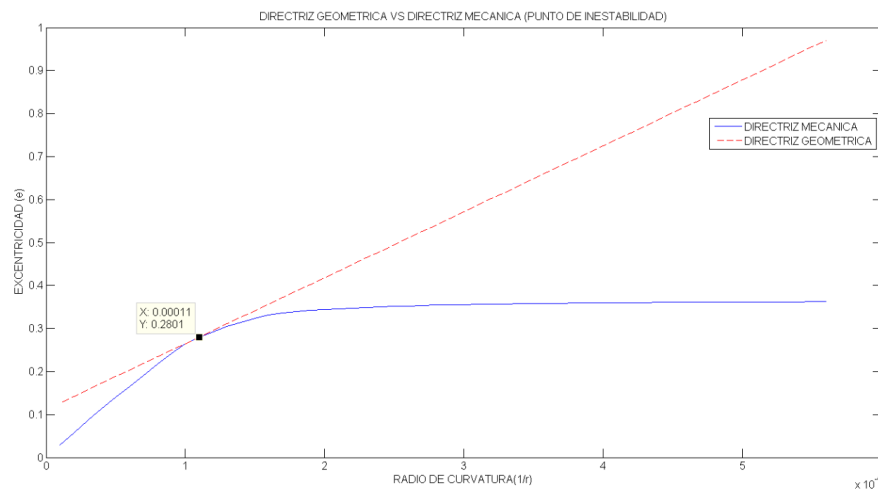


Figura 5.22.- Punto de inestabilidad para $N=118670 \text{ kg}$

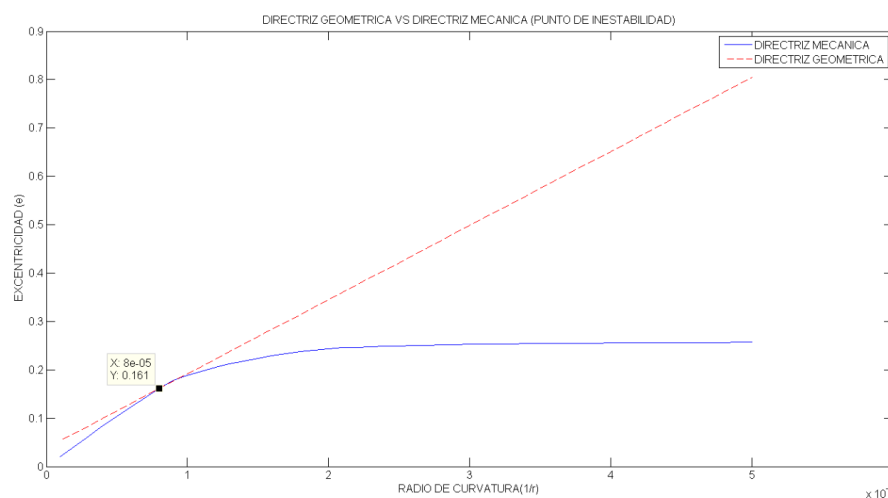


Figura 5.23.- Punto de inestabilidad para $N=160650 \text{ kg}$

Una vez que se conoce el momento máximo de la demanda que puede soportar la columna por inestabilidad (Tabla 5.10) para las diferentes cargas

axiales se puede construir el diagrama de interacción por inestabilidad, para este problema dicho diagrama se muestra en la Figura 5.24

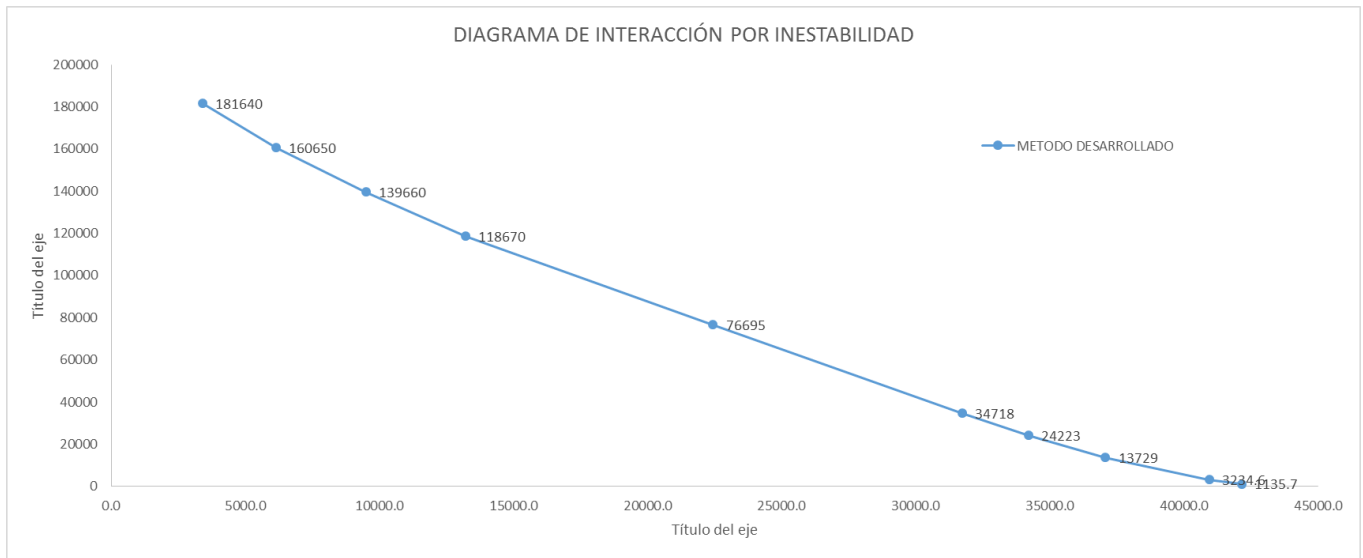


Figura 5.24.- Diagrama de interacción por inestabilidad según la metodología desarrollada (Columna de acero)

Capítulo 6 VALIDACIÓN Y RESULTADOS

Para la validación del método se usarán los resultados obtenidos de los problemas del capítulo 5 tanto para la columna de hormigón armado y la columna de acero rellena de hormigón.

Primero se validará la directriz mecánica, comparando el error relativo entre los puntos que delimitan el diagrama de interacción sin considerar los efectos de segundo orden, obtenido mediante los códigos correspondientes y mediante la aplicación de la metodología propuesta; luego se validará la intersección entre la directriz mecánica y la directriz geométrica, mediante el cálculo del error relativo entre los puntos que delimitan el diagrama de interacción por inestabilidad obtenidos mediante el código respectivo y la metodología propuesta.

El error relativo que exista está dado por la ecuación Ec [6.1.1].

$$error(\%) = 100 \left(\frac{M_{cod} - M_{met}}{M_{cod}} \right) \quad \text{Ec [6.1.1]}$$

$$M_{met} = N_i \cdot e_u$$

Donde:

M_{cod} = Capacidad a momento de la columna determinado mediante el código correspondiente para cada tipo de columna.

M_{met} = Capacidad a momento de la columna determinado según la metodología propuesta.

N_i = Fuerza axial dada para cada caso.

e_u = Excentricidad última de agotamiento o inestabilidad obtenida para el axial (N_i)

6.1 Validación y obtención de errores para el diagrama de interacción por agotamiento.

En la Tabla 6.1 se presentan diferentes cargas axiales para las cuales se obtuvo el momento máximo por agotamiento para la columna de hormigón del ejemplo desarrollado en la Sección 5.1, los momentos obtenidos mediante el código ACI 318-11 (y mediante la metodología propuesta, y el error relativo entre ambas Ec [6.1.1]; lo cual se aprecia gráficamente en la Figura 6.1

CARGA AXIAL [Kg]	MOMENTO MAXIMO SEGÚN ACI 318-11	MOMENTO MAXIMO SEGÚN METODOLOGÍA DESARROLLADA [Kg*m]	ERROR RELATIVO [%]
22970	25284	25244.0	0.2
70298	31844	32006.7	0.5
124848	36530	36280.8	0.7
138720	37064	36746.9	0.9
172230	35391	35031.6	1.0
233250	30595	29809.4	2.6
286290	25603	24592.3	3.9
315670	22291	21225.7	4.8

Tabla 6.1.- Error relativo por agotamiento para una columna de hormigón, entre el código ACI 318-11 y la metodología propuesta.

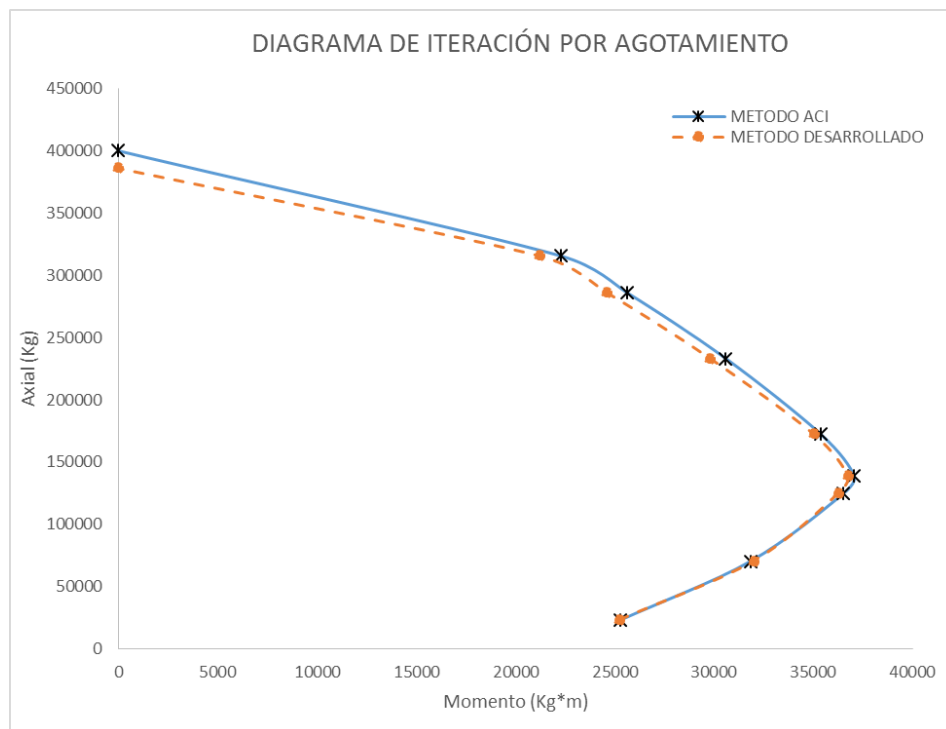


Figura 6.1.- Diagrama comparativo de interacción por agotamiento entre el código ACI 318-11 y la metodología propuesta (Columna de hormigón)

Como se observa en la Tabla 6.1, el error entre el diagrama de interacción por agotamiento construido en base al código ACI 318-11 y el construido en base a la metodología propuesta es menor al 5%, este error se debe a que en la metodología propuesta se tomaron las curvas esfuerzo-deformación reales de los materiales considerando su rango plástico. Por esta razón para una validación más real se realizó la comparación con el programa computacional de análisis estructural SAP2000 (Figura 6.2) en el cual se ingresaron las mismas curvas esfuerzo-deformación que las utilizadas en esta tesis obteniéndose la Tabla 6.2 y la Figura 6.3

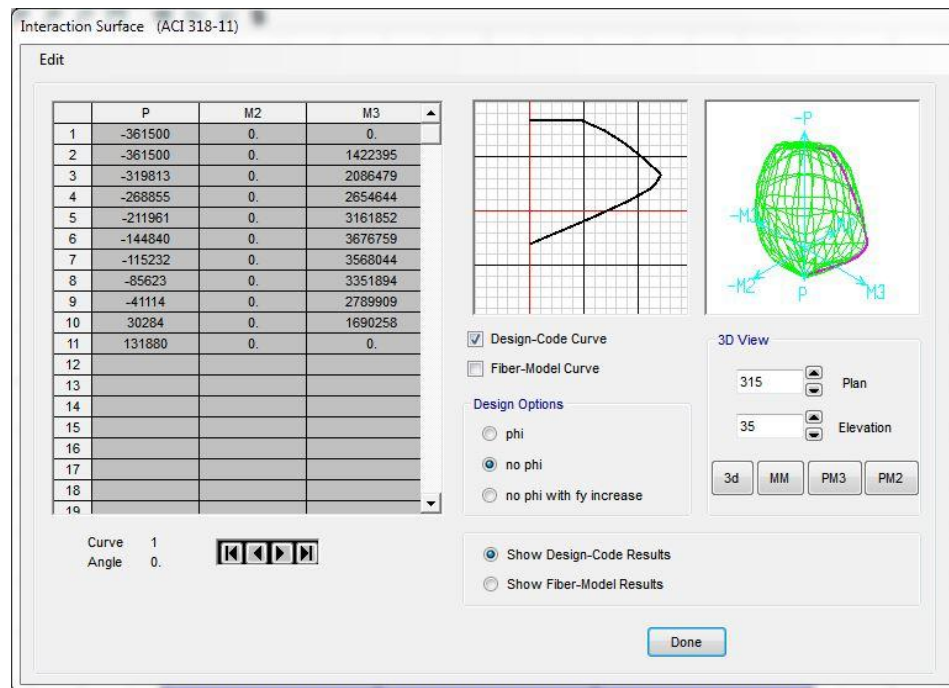


Figura 6.2.- Diagrama de interacción columna de hormigón (SAP200)

CARGA AXIAL [Kg]	MOMENTO MAXIMO SEGÚN SAP 2000 [Kg*m]	MOMENTO MAXIMO SEGÚN METODOLOGÍA DESARROLLADA [Kg*m]	ERROR RELATIVO [%]
41114.0	27899.1	27863.0	0.1
85623.0	33518.9	33624.2	0.3
144840.0	36767.6	36876.3	0.3
211961.0	31618.5	31794.2	0.6
268855.0	26546.4	26441.9	0.4
319813.0	20864.8	20596.0	1.3

Tabla 6.2.- Error relativo por agotamiento para una columna de hormigón, entre SAP 2000 y la metodología propuesta.

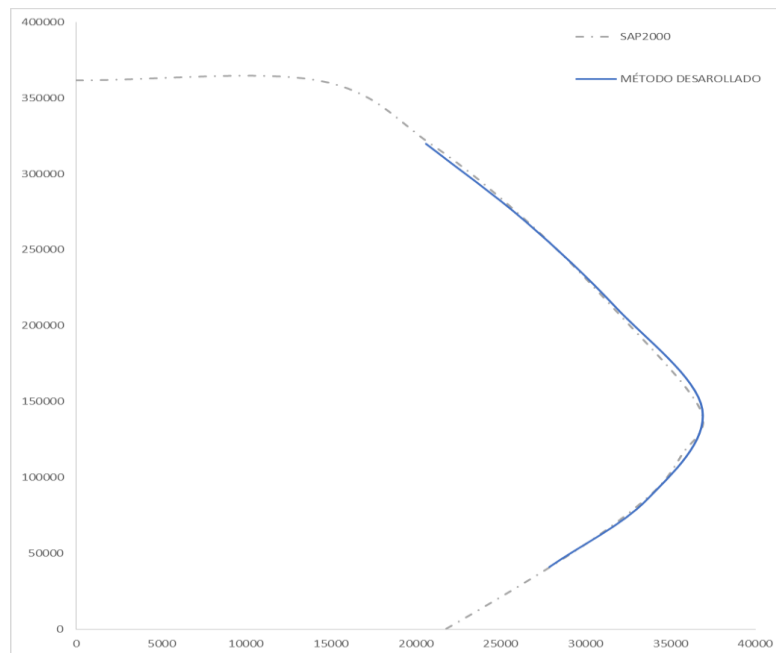


Figura 6.3.- Diagrama comparativo de interacción por agotamiento SAP2000 vs Metodología propuesta (Columna de hormigón)

En la Tabla 6.3 se presentan diferentes cargas axiales para las cuales se obtuvo el momento máximo por agotamiento para la columna de acero rellena de hormigón del ejemplo desarrollado en la Sección 5.3, los momentos obtenidos mediante el código AISC 360-10 y mediante la metodología propuesta, y el error relativo entre ambas E_c [6.1.1]; lo cual se aprecia gráficamente en la Figura 6.4

CARGA AXIAL [Kg]	MOMENTO MAXIMO SEGÚN AISC 360-10 [Kg*m]	MOMENTO MAXIMO SEGÚN METODOLOGÍA DESARROLLADA [Kg*m]	ERROR RELATIVO [%]
49410	44168	43935.4	0.5
80930	44051	43799.3	0.6
152260	42052	41673.6	0.9
181640	40524	40106.1	1.0
202630	39181	38722.6	1.2
265590	33892	33145.6	2.2
307570	29316	28059.6	4.3

Tabla 6.3.- Error relativo por agotamiento para una columna de acero, entre el código AISC 360-10 y la metodología propuesta.

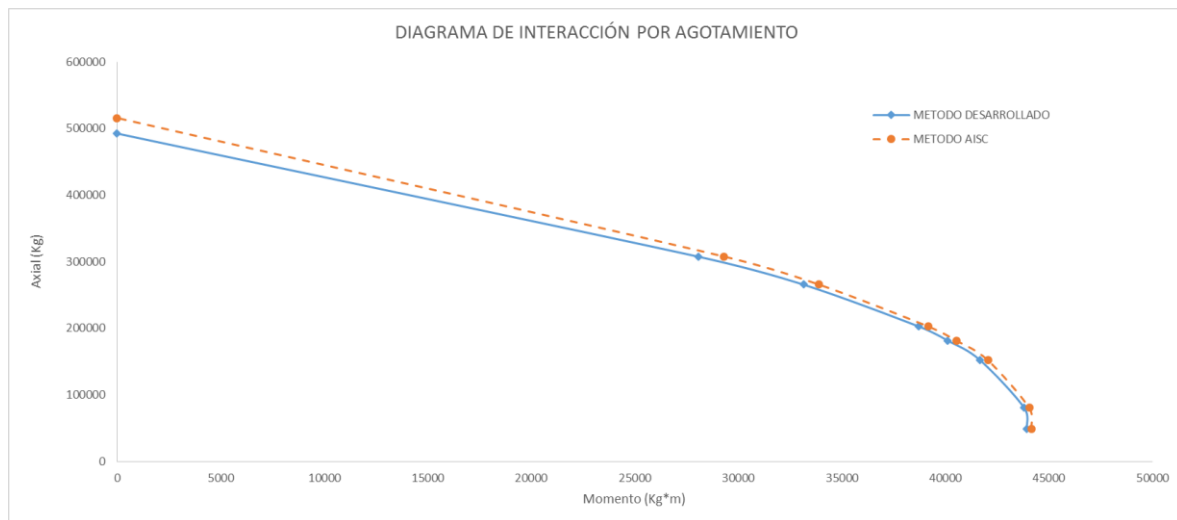


Figura 6.4.- Diagrama comparativo de interacción por agotamiento entre el código AISC 360-10 y la metodología propuesta (Columna de acero).

Como se observa en la Tabla 6.3 el error entre el diagrama de interacción por agotamiento construido en base al código AISC 360-10 y el construido en base a la metodología propuesta, al igual que en el caso del hormigón es menor al 5% debido a que las consideraciones tomadas para esta columna fueron las mismas que para la columna de hormigón. En este caso no se realizó la comparación con el programa computacional SAP2000 debido a que no se podían asegurar las mismas condiciones de adherencia entre el hormigón y el acero, y el nivel de confinamiento que tiene el hormigón dentro del perfil de acero.

El error relativo de los diagramas de interacción por agotamiento de la sección, para los dos tipos de columnas analizadas es menor al 5%, error relativo que se considera aceptable debido a las consideraciones que se toma en la metodología propuesta en esta tesis.

6.2 Validación y obtención de errores para el diagrama de interacción por inestabilidad

Al igual a lo que hizo en la Sección 6.1, se validará la metodología al comparar los resultados obtenidos para ambas columnas del Capítulo 5, mediante la metodología propuesta con los resultados obtenidos aplicando los códigos respectivos.

En la Tabla 6.4 se presentan diferentes cargas axiales para las cuales se obtuvo el momento máximo por inestabilidad para la columna de hormigón del ejemplo desarrollado en la Sección 5.1, los momentos obtenidos mediante el código ACI 318-11 y mediante la metodología propuesta, y el error relativo entre ambas E_c [6.1.1]; lo cual se aprecia gráficamente en la Figura 6.1

CARGA AXIAL [Kg]	MOMENTO MAXIMO SEGÚN ACI 318-11 [Kg*m]	MOMENTO MAXIMO SEGÚN METODOLOGÍA DESARROLLADA [Kg*m]	ERROR RELATIVO [%]
22970	24547.0	23865.9	2.8
48810	27232.0	26414.5	3.0
70298	29003.4	28299.9	2.4
89443	30182.8	29772.9	1.4
104040	30628.4	30761.6	0.4
131784	30668.6	31685.8	3.3
145656	30359.5	31141.9	2.6
172230	27656.4	28613.9	3.5
233250	21539.5	22882.5	6.2
315670	13362.0	14467.7	8.3

Tabla 6.4.- Error relativo por inestabilidad para una columna de hormigón, entre el código ACI 318-11 y la metodología propuesta.

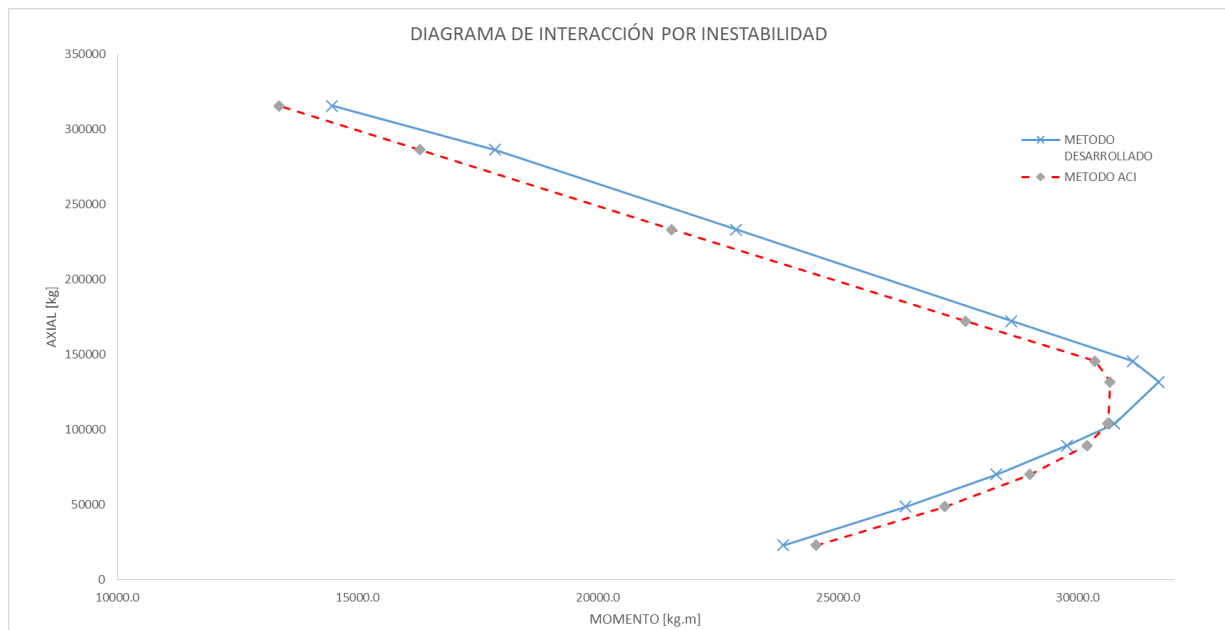


Figura 6.5.- Diagrama comparativo de interacción por inestabilidad entre el código ACI 318-11 y la metodología propuesta (Columna de hormigón)

Como se observa en la Tabla 6.4, el máximo error relativo entre los diagramas de interacción por inestabilidad para una columna de hormigón es del orden del 10%, este error se debe a que para el cálculo de este diagrama se parte del diagrama de interacción por agotamiento el cual tiene ya un máximo error relativo del orden del 5%, se considera que el otro 5% de error existente es debido a las diferentes asunciones que toma el código en el momento del cálculo del factor de reducción (δ) debido a la inestabilidad.

En la Tabla 6.5 se presentan diferentes cargas axiales para las cuales se obtuvo el momento máximo por inestabilidad para la columna de acero rellena de hormigón del ejemplo desarrollado en la Sección 5.3, los momentos

obtenidos mediante el código AISC 360-10 y mediante la metodología propuesta, y el error relativo entre ambas Ec [6.1.1]; lo cual se aprecia gráficamente en la Tabla 6.5.

CARGA AXIAL [Kg]	MOMENTO MAXIMO SEGÚN AISC 360-10 [Kg*m]	MOMENTO MAXIMO SEGÚN METODOLOGÍA DESARROLLADA [Kg*m]	ERROR RELATIVO [%]
1135.7	43144.6837	42150.6	2.3
3234.6	42705.67131	40946.2	4.1
13729	40460.97106	37069.6	8.4
24223	38142.21846	34212.8	10.3
34718	35758.93888	31734.6	11.3
76695	25757.67028	22440.6	12.9
118670	15438.23309	13229.6	14.3
139660	10337.66778	9498.4	8.1
160650	5372.662289	6164.0	14.7

Tabla 6.5.- Error relativo por inestabilidad para una columna de acero, entre el código AISC 360-10 y la metodología propuesta (Columna de acero).

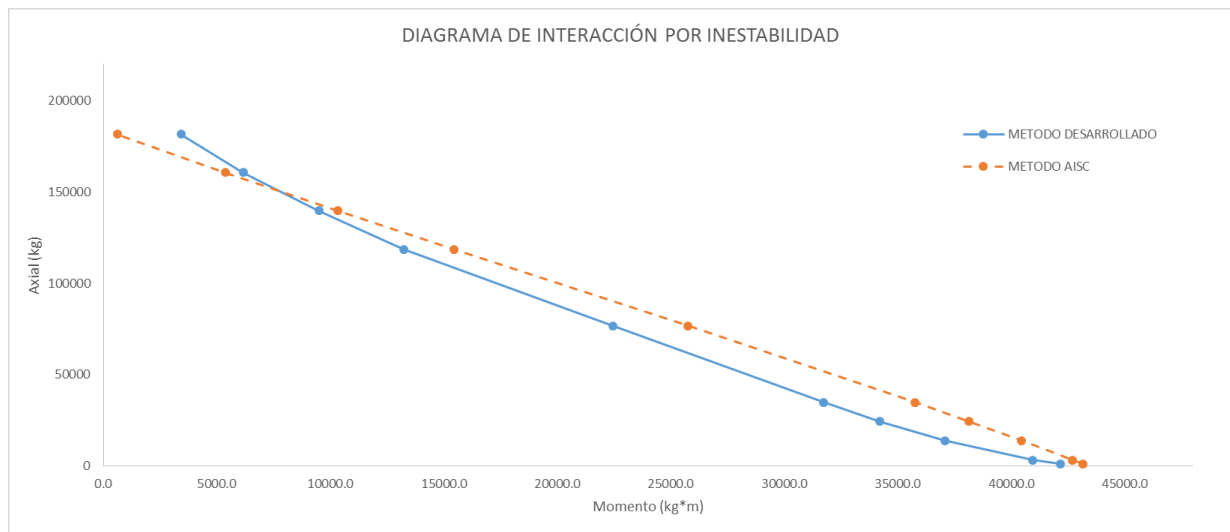


Figura 6.6.- Diagrama comparativo de interacción por inestabilidad entre el código AISC 360-10 y la metodología propuesta (Columna de acero).

Como se observa en la Tabla 6.5, el máximo error relativo entre los diagramas de interacción por inestabilidad para la columna de acero rellena de hormigón es del orden del 15%, este error se debe a que para el cálculo de este diagrama se parte del diagrama de interacción por agotamiento el cual tiene ya posee un máximo error relativo del orden del 5%, se considera que el 10% de error adicional es debido a las diferentes asunciones que toma el código el momento del cálculo del factor de reducción (β_1) debido a la inestabilidad.

Capítulo 7 CONCLUSIONES

Luego de haber realizado el análisis no lineal de columnas esbeltas mediante la obtención de sus esfuerzos internos y validado al comparar los resultados obtenidos con los códigos internacionales de diseño tanto de estructuras de hormigón armado (ACI318-11) como de estructuras de acero (AISC360-10), se concluye que:

1. La metodología propuesta es válida, tanto para el cálculo del punto último de agotamiento como del punto de inestabilidad, ya que, presenta errores relativos admisibles, debido a las asunciones tomadas por los códigos de diseño con respecto a la metodología propuesta.
2. Una de las ventajas del método es, que no se necesita construir un diagrama de interacción para poder determinar si las demandas a las que está sometida la columna, cumplen o no para la sección que se esté analizando, ya que, al localizar el punto de tangencia entre la directriz geométrica y mecánica se obtiene el momento máximo que soporta la sección incluyendo los efectos de segundo orden, y por ende, el momento máximo que puede tener la demanda para la fuerza axial analizada; para todos los momentos de la demanda menores al máximo la columna se encuentra en el rango de equilibrio estable [Figura 7.1], pero si el momento excede el máximo la columna falla por inestabilidad (pandeo).

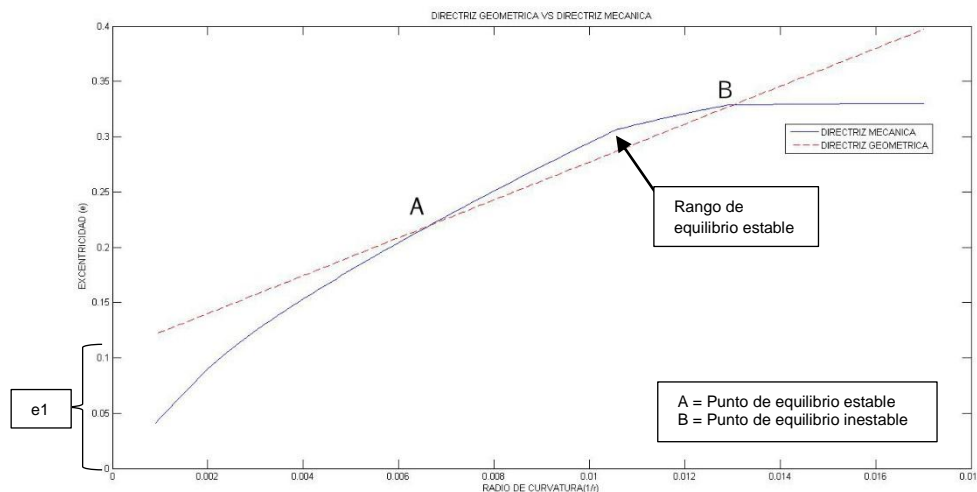


Figura 7.1.-Directriz geométrica y mecánica: rango de equilibrio estable

3. El método es muy útil, ya que, se puede conocer el estado tensional de la sección en el punto de inestabilidad; además, se puede saber que material está brindando mayor esfuerzo, la ubicación de la fibra neutra para el radio de curvatura donde ocurre la inestabilidad, puntos de inicio de plastificación del acero, estado deformacional de la sección.
4. Manteniendo las mismas características de la sección, a menor carga axial, mayor será la excentricidad de la directriz mecánica [Figura 7.2]

Esto se produce porque, para el mismo radio de curvatura, la profundidad de fibra neutra baja, conforme la carga axial de la demanda aumenta, por lo que la relación $\left(\frac{M}{N}\right)$ disminuye.

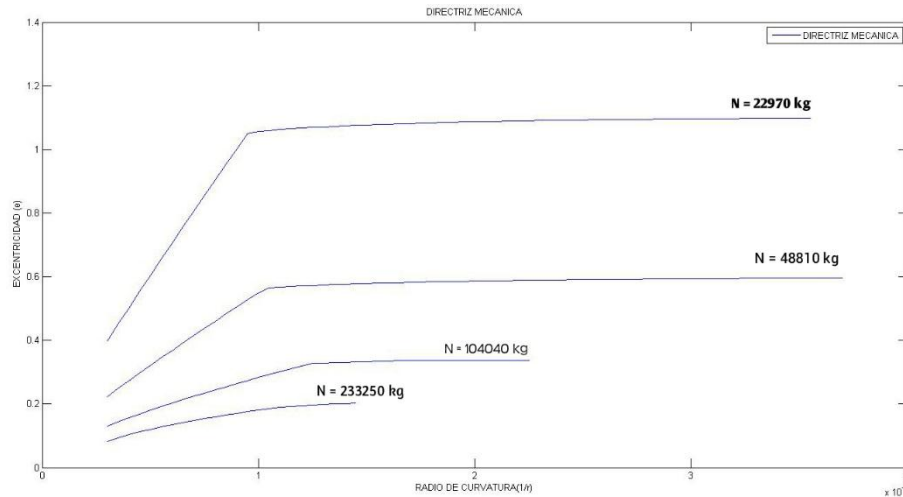


Figura 7.2.- Directrices mecánicas para diferentes cargas axiales

5. El método posee gran versatilidad, debido a que puede aplicarse a columnas esbeltas constituidas de distintos materiales, tan solo introduciendo sus curvas esfuerzo-deformación reales en los programas desarrollados. En caso de columnas compuestas por distintos materiales se deben tener en cuenta, las suposiciones para la determinación de la directriz mecánica (Sección 2.3.1).
6. En un análisis más riguroso del punto de inestabilidad (Punto de tangencia entre directriz mecánica y directriz geométrica), se recomienda disminuir la variación del radio de curvatura, tomar en cuenta el endurecimiento del acero en su curva esfuerzo-deformación.
7. Al no conocer si la distribución de la curvatura aplicada por los códigos para la obtención del factor de mayoración, es similar a la aplicada en esta tesis; un porcentaje del error relativo se lo puede atribuir a las diferentes curvaturas existentes (Anexo 1), cuya variación se muestra en la Figura 7.3.

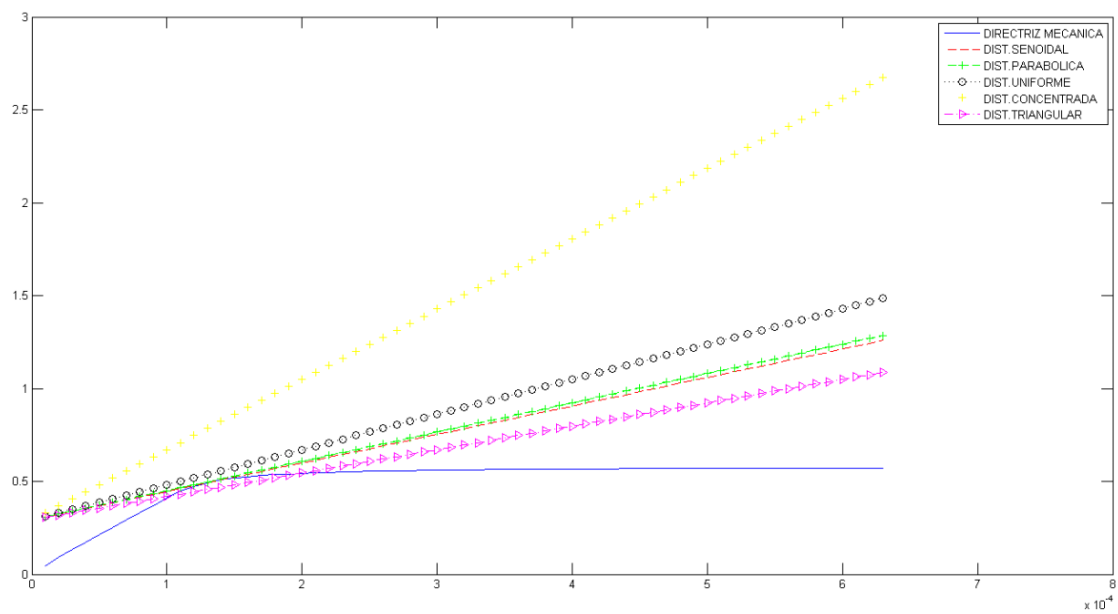


Figura 7.3.- Tipos de distribución de curvaturas

Capítulo 8 BIBLIOGRAFÍA

- [1] A. H. Nilson, Diseño de Estructuras de Concreto, Bogotá-Colombia: Mc. Graw Hill, 2001.
- [2] M. A. O. Sánchez, Análisis del Pandeo de Pilares en régimen no lineal mediante Splines Generalizados, Madrid: Universidad Politécnica de Madrid, 2004.
- [3] A. Páez, Hormigón Armado, vol. II, Barcelona: Reverté, 1986, pp. 971-992.
- [4] H. C. Peiretti, «Dimensionamiento de soportes esbeltos de sección constante de hormigón armado en estado limite ultimo de agotamiento o inestabilidad. Método de las curvaturas de referencia,» Madrid, 1980.
- [5] J. C. L. Agüí, Estabilidad de Pilares Esbeltos de Hormigón. Estado Límite Último de Inestabilidad, Madrid: LOEMCO, 1997.
- [6] ANSI/AISC, Comentarios de la Especificacion ANSI/AISC 360-10, Santiago de Chile: alacero, 2012.
- [7] McCormac, Diseño de Estructuras de Acero. Metodo LRFD, Alfaomega, 2002.
- [8] J. A. d. C. A. y. M. B. A. Murcia Vela, Hormigón armado y pretensado, Ediciones UPC, 1993.
- [9] A. C. Institute, Requisitos y Reglamento para Concreto Estructural (ACI318S-11), ACI, 2011.
- [10] T. E. C. f. S. (CEN), Eurocode 2: Design of concrete structures, UK: BSI, 1992.
- [11] I. Cañizares, «Clases de Materiales de Construcción,» Cuenca-Ecuador, 2011.
- [12] M. R. Proaño, Temas de Hormigón Armado, Sangolqui-Pichincha: Escuela Politécnica del Ejército.
- [13] R. P. y. T. Paulay, Estructuras de Concreto Reforzado, Christchurch-Nueva Zelanda: Limusa.
- [14] H. M. Romero, «Efecto de las Deformaciones por Cortante en los Diagramas Momento-Curvatura M-psi de Secciones de Concreto Reforzado y sus Implicaciones en la Evaluación y Diseño Sísmico de Estructuras,» Mexico D.f,

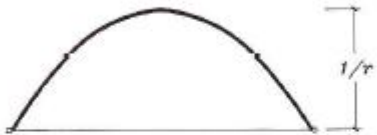

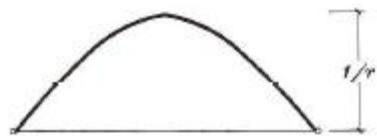
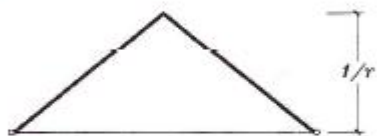
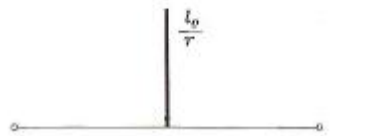


Universidad Autónoma de Mexico, 2012.

- [15] J. V. Juan, «Capítulo 2: Estado del Conocimiento,» de *Límites de esbeltez para soportes de hormigón con sección rectangular*, pp. 3-33.
- [16] J. Bernal, Columnas, Madrid: Nobuko, 1997.
- [17] ANSI/ASIC, Especificación ANSI/AISC 360-10 para Construcciones de Acero, Santiago de Chile: alacero, 2010.
- [18] F. L. Singer, Resistencia de Materiales, Pensilvania: Harla, 1982.
- [19] A. I. o. S. C. INC., AISC. Design Example. version 13.0, AISC, 2005.
- [20] H. C. Pieretti, «Clases Magistrales-Universidad Politecnica de Madrid,» Madrid.

Capítulo 9 ANEXOS

Anexo 1. Tabla de distribuciones de curvaturas.

DISTRIBUCION DE LAS CURVATURAS (CARGAS EN LA VIGA CONJUGADA)	EXCENTRICIDAD DE 2° ORDEN (MOM. FLECTOR EN VIGA C)	DIRECTRIZ GEOMETRICA
<p>SENoidal</p> 	$\frac{l}{\pi^2} \frac{l_0^2}{r}$	$e_t = e^I + \frac{l}{\pi^2} \frac{l_0^2}{r}$
<p>UNIFORME</p> 	$\frac{l}{8} \frac{l_0^2}{r}$	$e_t = e^I + \frac{l}{8} \frac{l_0^2}{r}$
<p>PARABOLICA</p> 	$\frac{5}{48} \frac{l_0^2}{r}$	$e_t = e^I + \frac{5}{48} \frac{l_0^2}{r}$
<p>TRIANGULAR</p> 	$\frac{l}{12} \frac{l_0^2}{r}$	$e_t = e^I + \frac{l}{12} \frac{l_0^2}{r}$
<p>CONCENTRADA</p> 	$\frac{l}{4} \frac{l_0^2}{r}$	$e_t = e^I + \frac{l}{4} \frac{l_0^2}{r}$

Anexo 2. Tabla de inercias y módulos de elasticidad para el hormigón

10.10.4.1 — Se permite usar las siguientes propiedades para los elementos en la estructura:

- (a) Módulo de elasticidad E_c de 8.5.1
- (b) Momentos de inercia, I
 Elementos en compresión:
 Columnas $0.70I_g$
 Muros – no agrietados $0.70I_g$
 – agrietados $0.35I_g$
 Elementos a flexión:
 Vigas $0.35I_g$
 Placas planas y losas planas $0.25I_g$
- (c) Área $1.0A_g$

Anexo 3. Clasificación de la sección según su esbeltez para pandeo local a compresión

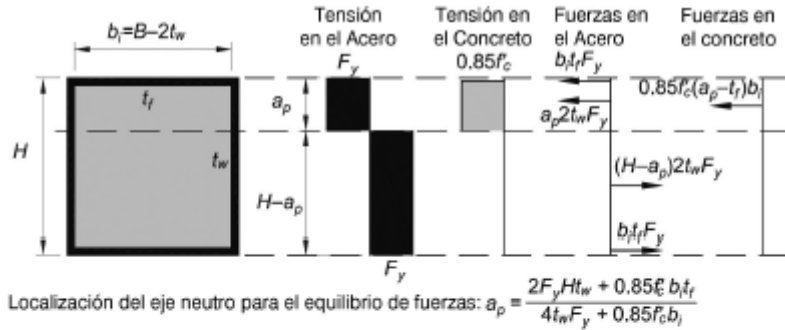
TABLA I1.1a Razones Ancho-Espesor límites para elementos de acero comprimidos en miembros compuestos sujetos a compresión axial Para Uso con Sección I2.2				
Descripción del Elemento	Razón Ancho-espesor	λ_p Compacto/ No compacto	λ_r No compacto/ Esbelto	Máximo Permitido
Paredes de secciones tubulares rectangulares (HSS) y de cajón de espesor uniforme	b/t	$2.26 \sqrt{\frac{E}{F_y}}$	$3.00 \sqrt{\frac{E}{F_y}}$	$5.00 \sqrt{\frac{E}{F_y}}$

Tabla 9.1.- Relaciones ancho-espesor para clasificación de secciones según el pandeo local por compresión

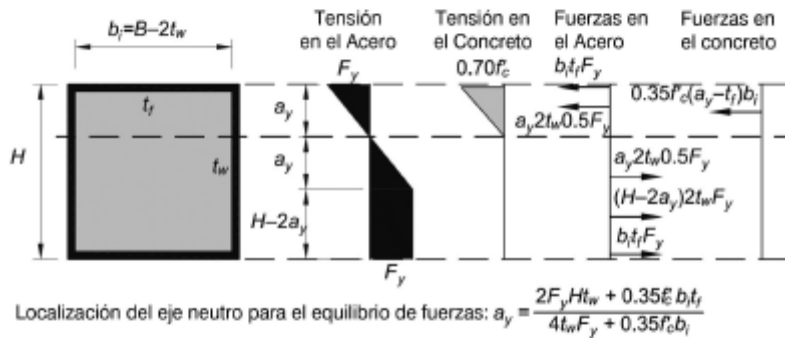
TABLA I1.1b Razones Ancho-Espesor límites para elementos de acero comprimidos en miembros compuestos sujetos a flexión Para Uso con Sección I3.4				
Descripción del Elemento	Razón Ancho-espesor	λ_p Compacto/ No compacto	λ_r No compacto/ Esbelto	Máximo Permitido
Alas de secciones tubulares rectangulares (HSS) y de cajón de espesor uniforme	b/t	$2.26 \sqrt{\frac{E}{F_y}}$	$3.00 \sqrt{\frac{E}{F_y}}$	$5.00 \sqrt{\frac{E}{F_y}}$
Almas de secciones tubulares rectangulares (HSS) y de cajón de espesor uniforme	D/t	$3.00 \sqrt{\frac{E}{F_y}}$	$5.70 \sqrt{\frac{E}{F_y}}$	$5.70 \sqrt{\frac{E}{F_y}}$

Tabla 9.2.- Relaciones ancho-espesor para clasificación de secciones según el pandeo local por flexión

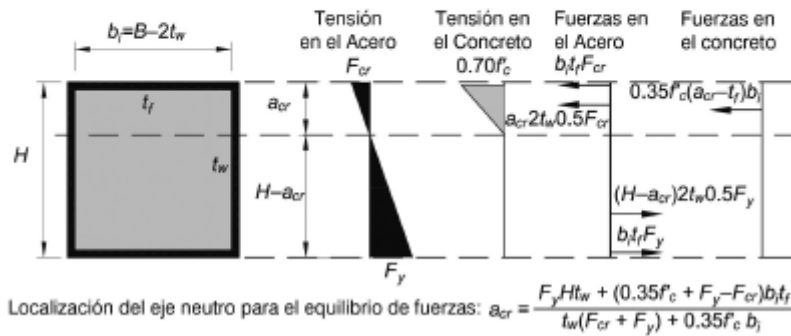
Anexo 4. Distribución Plástica esfuerzo en secciones de acero rellenas de hormigón según el pandeo local



(a) Sección compacta-bloque de tensiones para calcular M_p



(b) Sección no compacta-bloque de tensiones para calcular M_y



(c) Sección esbelta-bloque de tensiones para calcular M_{cr}

Anexo 5. Codificación en Matlab

A. Script para la columna de hormigón armado

```
clear,clc
%Se ingresan las cargas externas
disp('Ingrese el valor de la fuerza axial')
next=input('next [kg]= ');
%Se ingresan las características de la columna
disp('Ingrese la longitud de la columna')
long= input('L[m]= '); % long (m) = Longitud de la columna
longitud=long*100;
disp('Ingrese las dimensiones y el recubrimiento de la sección')
b=input('b [cm]= '); % b (cm) = Ancho de la seccion transversal de la columna
h=input('h [cm]= '); % h (cm) = Peralte de la seccion transversal de la columna
r=input('r [cm]= ');
disp('Ingrese las resistencias de los materiales')
fc=input('fc [kg/cm²]= '); % fc (kg/cm²) = Resistencia del hormigon a los 28 dias
fy=input('fy [kg/cm²]= '); % fy (kg/cm²) = Esfuerzo de fluencia del acero de
perfiles
disp('Ingrese el valor del factor de longitud efectiva para la columna analizada')
k=input('k= '); % k = Factor de longitud efectiva
disp('Ingrese el modulo de elasticidad del acero')
Es=input('Es [kg/cm²]= ');
%Numero de varillas
disp('Ingrese los datos sobre el refuerzo longitudinal de la columna ')
num_varillas1=input('Número de varillas en la cara superior = ');
diametro1=input('Diamtro de las varillas [mm]= ');
num_varillas2=input('Número de varillas en la cara inferior = ');
diametro2=input('Diamtro de las varillas [mm]= ');
as1=num_varillas1*(diametro1/10)^2*pi/4;
as2=num_varillas2*(diametro2/10)^2*pi/4;
%calculo de las excentricidades externas
ea=max(0.002, [(k*longitud)/25000,h/30000]);
%calculo de peralte efectivo de la columna
d=h-r;
xab=7/27*d;
i=1;
%calculo de l esbeltez geometrica
landa= (longitud*k)/(h);
ll=1;
vars=0;
%calculo de la directriz gemetrica
%se hace variar el radio de curvatura
for rc=0.00003:0.000005:0.0007
    o=1;
    %Se inician variables que nos serviran para la programacion
    tolant=9999999;
    hmin=0;
    haux =3*h;
    lastxn=0;
    lastnint=0;
    lastmint=0;
    %Se asume una tolerancia para la convergencia del método
    while (tolant>=0.00001)
        xn(o,1) = (hmin + haux)/2;
        xn(o,2) = hmin + (haux-hmin)/4;
        xn(o,3) = hmin + ((haux-hmin)/4)*3;
        nint = zeros(3);
        mint = zeros(3);
        for kk=1:3
            [nint(kk),mint(kk),tol(o,kk)]=ejeneutro(fc,fy,rc,next,b,h,r,as1,as2,xn(o,kk));
        end
        %Verifica el valor de la tolerancia de cada intervalo, para en base
        %a esto escoger el nuevo intervalo de calculo
        if (tol(o,2) < tol(o,1))
            haux = xn(o,1);
            lastxn=xn(o,2);
            tolant = tol(o,2);
            lastnint=nint(2);
            lastmint=mint(2);
        end
    end
end
```




```
elseif (tol(o,3) < tol(o,1))
    hmin = xn(o,1);
    lastxn=xn(o,3);
    tolant = tol(o,3);
    lastnint=nint(3);
    lastmint=mint(3);
else
    rango=(haux-hmin)/4;
    hmin=hmin+rango;
    haux=haux-rango;
    lastxn=xn(o,1);
    tolant = tol(o,1);
    lastnint=nint(1);
    lastmint=mint(1);
end
o=o+1;
end
xn=lastxn;
tol=tolant;
nint=lastnint;
mint=lastmint;
vars(ll,1)=xn;
vars(ll,2)=rc;
vars(ll,3)=mint/nint;
ll=ll+1;
xnfin(i,1)=xn;
eje(i,1)=xn;
%Calculo de la excentricidad geometrica
e2(i,1)=1/pi^2*landa^2*h^2*rc/100;
radio(i,1)=rc;
pu(i,1)=nint;
mu(i,1)=mint;
i=i+1;
%Verifica el valor de la tolerancia, para comprobar si el valor de la tolerancia es
menor que el mínimo permitido
if tol<0.001
    defa=rc*(d-xn)
    defc=rc*xn
    if xn<=xab
        if defa<0.01
            else
                break
            end
        end
    else
        defc=rc*xn;
        if defc<0.0035
            else
                break
            end
        end
    end
end
end
%calculo de la excentricidad interna
eint=mu./pu;
%calculo de la directriz geometria en el punto de tangencia con la
%directriz mecanica
delta_geo=abs(e2(2,1)-e2(1,1)); % m_geometrica= variacion de excentricidades entre
puntos de la e2
dimension=length(eint);
for i=1:dimension-1
    delta_mec(i,1)=abs(eint(i+1,1)-eint(i,1));
    error(i,1)=abs((delta_mec(i,1)-delta_geo)/delta_geo);
end
pos=find(error==min(min(error)));
efec_2or=eint(pos,1);
e1=abs(e2(pos,1)-efec_2or);
ext=e1+e2;
Mmax=next*e1;
disp('EL MOMENTO MÁXIMO POR INESTABILIDAD QUE SOPORTA LA COLUMNA SERA '),disp(Mmax)
disp('LA PROFUNDIDAD DE FIBRA NEUTRA SE ENCUENTRA A ='),disp(vars(pos,1))
disp('EL RADIO DE CURVATURA EN EL PUNTO DE TANGENCIA ES ='),disp(vars(pos,2))
plot(radio,eint,'-b',radio,ext,'--r')
hold on
xlabel('RADIO DE CURVATURA(1/r)')
```



```
ylabel('EXCENTRICIDAD (e)')
title('DIRECTRIZ MECANICA VS DIRECTRIZ GEOMETRICA (PUNTO DE INESTABILIDAD)')
legend('DIRECTRIZ MECANICA','DIRECTRIZ GEOMETRICA')
```

B. Función “defhormigon.m”

```
function [ ncc,mcc] = defhormigon( b,h,fc,xn,rc )
%Esta funcion calcula la resistencia a compresion que puede generar la seccion
%rellena de hormigon para una profundidad de fibra neutra y radio
%de curvatura conocidos
%DATOS QUE INGRESAN A LA FUNCION
% b (m) = Ancho de la seccion transversal de la columna
% h (m) = Peralte de la seccion transversal de la columna
% esp (m) = Espesor constante de la seccion transversal
% fc (Mpa) = Resistencia caracterisitica del hormigon a los 28 dias
% xn (m) = Profundidad de fibra neutra
% rc (1/m) = radio de curvatura de la seccion
%RESULTADOS QUE SE OBTIENEN CON LA FUNCION
% ncc (KN) = Resisitencia del hormigon a compresion
% mcc (KN.m) = Capacidad a momento del hormigon a compresion
gc=1; %gc = Factor de reducci3n de resistencia del hormig3n
vuc=0.85*fc/gc; %vuc = Esfuerzo ultimo del hormigon (MPa)
e0=0.002; %e0 = Deformacion limite entre parabola-rectangulo
eu=0.0035; %eu = Deformacion ultima del hormigon
x0=xn-e0/rc; %x0 = Altura a la e=0.002 medida desde el extremo superioir de la
seccion (m)
if x0<0
x0=0;
end
syms x
e=rc*(xn-x);
vc1=1000*e*(1-250*e)*vuc;
if xn>h
alc=int(b*vc1,x0,xn)-int(b*vc1,h,xn);
a2c=b*x0*vuc;
ncc=alc+a2c;
x1=h/2-(int(vc1*x*b,x0,h)/int(vc1*b,x0,h));
x2=(xn-x0/2)+(h/2-xn);
mcc=(alc*x1+a2c*x2);
else
alc=int(b*vc1,x0,xn);
a2c=b*x0*vuc;
ncc=alc+a2c;
x1=h/2-(int(vc1*x*b,x0,xn)/int(vc1*b,x0,xn));
x2=(xn-x0/2)+(h/2-xn);
mcc=(alc*x1+a2c*x2);
end
end
```

C. Funci3n “ejeneutro.m”

```
function [nto,mint,tolerancia] = ejeneutro( fc,fy,rc,next,b,h,r,as1,as2,xn )
%as=4*(20/1000)^2*pi/4;
%fc=Resistencia del hormig3n a los 28 dias (MPa)
%fy=Esfuerzo de fluencia del acero de varillas (MPa)
ga=1; %gc=Factor de reducci3n de resistencia del acero
vua=fy/ga; %Esfuerzo ultimo del acero (MPa)
Es=200000; %Es=Modulo de elasticidad del acero (MPa)
%rc=1/r=Radio de curvatura de la seccion central (1/m)
%next=Axil externo dado por las demandas (kN)
eyd=vua/Es; %Deformaci3n debido a vua
%solo para este caso de comprobaci3n de ejemplo se ingresa el eje neutro
%(xn)
%Calcula el refuerzo del acero
[ ncc,mcc] = defhormigon( b,h,fc,xn,rc );
%Calcula el refuerzo del acero
syms x
e=rc*(xn-x);
x=r;
gs1=eval(e);
x=h-r;
gs2=eval(e);
x=h;
```



```
gsf=eval(e);
if gs1>-eyd && gs1<eyd
    val=Es*gs1;
else
    val=vua;
end
if gs2>-eyd && gs2<eyd
    va2=Es*gs2;
else
    if gs2<0
        va2=-vua;
    else
        va2=vua;
    end
end
vat=(val*as1+va2*as2);
nto=double(ncc+vat);
mint=mcc+as1*(h/2-r)*val+as2*(h/2-(h-r))*va2;
mint=double(mint)/100;
tol=abs((next-(ncc+vat))/next);
tolerancia=double(tol);
end
```

D. Script para la columna de acero rellena de hormigón.

```
clear all
clc

%DATOS QUE INGRESAN AL SCRIPT
%Demandas externas
disp('Ingrese el valor de la fuerza axial')
next=input('next [kg]= ');
%Características (datos) de la columna
disp('Ingrese la longitud de la columna')
long= input('L[m]= '); % long (m) = Longitud de la columna
long=long*100;
disp('Ingrese el valor del factor de longitud efectiva para la columna analizada')
k=input('k= '); % k = Factor de longitud efectiva
disp('Ingrese las dimensiones de la sección')
b=input('b [cm]= '); % b (cm) = Ancho de la sección transversal de la columna
h=input('h [cm]= '); % h (cm) = Peralte de la sección transversal de la columna
esp=input('Espesor del perfil [cm]= '); % esp (cm) = Espesor constante de la
sección transversal de acero
disp('Ingrese las resistencias de los materiales')
fc=input('fc [kg/cm²]= '); % fc (kg/cm²) = Resistencia del hormigón a los 28 días
fy=input('fy [kg/cm²]= '); % fy (kg/cm²) = Esfuerzo de fluencia del acero de
perfiles
disp('Ingrese el módulo de elasticidad del acero')
Es=input('Es [kg/cm²]= ');
ea=max([0.002,k*long/25000,h/30000]); % ea (m) = Excentricidad accidental
i=1;
%Calculo de la directriz geométrica
landa= (long*k)/h; % landa (m) = Esbeltez geométrica
ll=1;
vars=0;
%calculo de la directriz geométrica
%se hace variar el radio de curvatura
for rc=0.00001:0.00001:0.001
    o=1;
    %Se inician variables que nos servirán para la programación
    tola=9999999;
    hmin=-3*h;
    haux=5*h;
    lastxn=0;
    lastnint=0;
    lastmint=0;
    %Se asume una tolerancia para la convergencia del método
    while (tola>=0.00001)
        xn(o,1) = (hmin + haux)/2;
        xn(o,2) = hmin + (haux-hmin)/4;
        xn(o,3) = hmin + ((haux-hmin)/4)*3;
        nint = zeros(3);
        mint = zeros(3);
        for kk=1:3
            [ nint(kk),mint(kk),tol(o,kk) ] = ejeneutro(
next,b,h,esp,fc,fy,xn(o,kk),rc,Es );
```



```
end
%Verifica el valor de la tolerancia de cada intervalo, para en base
%a esto escoger el nuevo intervalo de calculo
if (tol(o,2) < tol(o,1))
    haux = xn(o,1);
    lastxn=xn(o,2);
    tolant = tol(o,2);
    lastnint=nint(2);
    lastmint=mint(2);
elseif (tol(o,3) < tol(o,1))
    hmin = xn(o,1);
    lastxn=xn(o,3);
    tolant = tol(o,3);
    lastnint=nint(3);
    lastmint=mint(3);
else
    rango=(haux-hmin)/4;
    hmin=hmin+rango;
    haux=haux-rango;
    lastxn=xn(o,1);
    tolant = tol(o,1);
    lastnint=nint(1);
    lastmint=mint(1);
end
o=o+1;
end
xn=lastxn;
tol=tolant;
nint=lastnint;
mint=lastmint;
vars(ll,1)=xn;
vars(ll,2)=rc;
vars(ll,3)=mint/nint;
ll=ll+1;
xnfin(i,1)=xn;
eje(i,1)=xn;
%Calculo de la excentricidad geometrica
e2(i,1)=1/pi^2*landa^2*h^2*rc/100;
radio(i,1)=rc;
pu(i,1)=nint;
mu(i,1)=mint;
i=i+1;
%Verifica el valor de la tolerancia, para comprobar si el valor de la tolerancia
%es menor que el mínimo permitido
if tol<0.00001
    def1=rc*(xn)
    def2=rc*(xn-h)
    defh=rc*(xn-esp);
    if abs(def1)>0.01 || abs(def2)>0.01 || abs(defh)>0.01
        disp('Se ha excedido la deformacion maxima admisible')
        break
    end
end
end
end
%calculo de la excentricidad interna
eint=mu./pu;
%calculo de la directriz geometria en el punto de tangencia con la
%directriz mecanica
delta_geo=abs(e2(2,1)-e2(1,1)); % m_geometrica= variacion de excentricidades entre
puntos de la e2
dimension=length(eint);
for i=1:dimension-1
    delta_mec(i,1)=abs(eint(i+1,1)-eint(i,1));
    error(i,1)=abs((delta_mec(i,1)-delta_geo)/delta_geo);
end
pos=find(error==min(min(error)))
efec_2or=eint(pos,1);
e1=abs(e2(pos,1)-efec_2or);
ext=e1+e2;
plot(radio,eint,'-b',radio,ext,'--r')
hold on
title('DIRECTRIZ GEOMETRICA VS DIRECTRIZ MECANICA (PUNTO DE INESTABILIDAD)')
legend('DIRECTRIZ MECANICA','DIRECTRIZ GEOMETRICA')
xlabel('RADIO DE CURVATURA(1/r)')
```



ylabel('EXCENTRICIDAD (e)')

E. Función “defhormigon.m”

```
function [ncc,mcc] = defhormigon( b,h,esp,fc,xn,rc )
%Esta funcion calcula la resistencia a compresion que puede generar la seccion
%rellena de hormigon para una profundidad de fibra neutra y radio
%de curvatura conocidos
%DATOS QUE INGRESAN A LA FUNCION
% b (m) = Ancho de la seccion transversal de la columna
% h (m) = Peralte de la seccion transversal de la columna
% esp (m) = Espesor constante de la seccion transversal
% fc (Mpa) = Resistencia caracterisitica del hormigon a los 28 dias
% xn (m) = Profundidad de fibra neutra
% rc (1/m) = radio de curvatura de la seccion

%RESULTADOS QUE SE OBTIENEN CON LA FUNCION
% ncc (KN) = Resisitencia del hormigon a compresion
% mcc (KN.m) = Capacidad a momento del hormigon a compresion

vuc=0.85*fc; %vuc = Esfuerzo ultimo del hormigon (MPa)
befec=b-2*esp; %befec = Ancho de seccion de hormigon enbebida en el perfil (m)
hefec=h-2*esp; %hefec = Peralte de seccion de hormigon enbebida en el perfil (m)
e0=0.002; %e0 = Deformacion limite entre parabola-rectangulo
x0=xn-e0/rc; %x0 = Altura a la e=0.002 medida desde el extremo superior de la
seccion (m)
if x0<esp
    x0=esp;
end
syms x
e=rc*(xn-x);
vc1=1000*e*(1-250*e)*vuc;
if xn>h-esp
    alc=int(befec*vc1,x0,xn)-int(befec*vc1,h-esp,xn);
    a2c=befec*(x0-esp)*vuc;
    ncc=alc+a2c;
    x1=h/2-(int(vc1*x*befec,x0,h-esp)/int(vc1*befec,x0,h-esp));
    x2=h/2-esp-(x0-esp)/2;
    mcc=(alc*x1+a2c*x2);
elseif (xn>=esp) && (xn<=h-esp)
    alc=int(befec*vc1,x0,xn);
    a2c=befec*(x0-esp)*vuc;
    ncc=alc+a2c;
    x1=h/2-(int(vc1*x*befec,x0,xn)/int(vc1*befec,x0,xn));
    x2=h/2-esp-(x0-esp)/2;
    mcc=(alc*x1+a2c*x2);
else
    ncc=0;
    mcc=0;
end
ncc=double(ncc);
mcc=double(mcc)/100;
end
```

F. Función “ejeneutro.m”

```
function [nint,mint,tolerancia] = ejeneutro( next,b,h,esp,fc,fy,xn,rc,Es )
%Esta funcion calcula la resistencia a compresion y traccion que puede
%generar la seccion para una profundidad de fibra neutra y radio
%de curvatura conocidos
%DATOS QUE INGRESAN A LA FUNCION
% next (KN) = Demanda axial que debe soportar la columna
% b (m) = Ancho de la seccion transversal de la columna
% h (m) = Peralte de la seccion transversal de la columna
% esp (m) = Espesor constante de la seccion transversal
% fc (Mpa) = Resistencia caracterisitica del hormigon
% fy (Mpa) = Esfuerzo de fluencia del acero
% xn (m) = Profundidad de fibra neutra
% rc (1/m) = radio de curvatura de la seccion
%RESULTADOS QUE SE OBTIENEN CON LA FUNCION
% nac (KN) = Resistencia del perfil a compresion
```

```
% nat (KN) = Resisitencia del perfil a traccion
% mac (KN.m) = Capacidad a momento del perfil a compresion
% mat (KN.m) = Capacidad a momento del perfil a traccion
%la funcion defhormigon da como resultado el axial y el momento a compresion
%de la seccion producida por el hormigon
[ncc,mcc] = defhormigon( b,h,esp,fc,xn,rc );
%la funcion defaceroperfil da como resultado el axial y el momento a compresion
%y a traccion de la seccion producida por el acero de perfil
[nac,nat,mac,mat] = defaceroperfil( b,h,esp,fy,xn,rc,Es );
nint=ncc+nac+nat;
mint=mcc+mac+mat;
tol=abs( (next-nint)/next);
tolerancia=tol;
end
```

G. Función “defaceroperfil.m”

```
function [nac,nat,mac,mat] = defaceroperfil( b,h,esp,fy,xn,rc,Es )
%Esta funcion calcula la resistencia a compresion y traccion que puede
%generar la seccion para una profundidad de fibra neutra y radio
%de curvatura conocidos
%DATOS QUE INGRESAN A LA FUNCION
% b (cm) = Ancho de la seccion transversal de la columna
% h (cm) = Peralte de la seccion transversal de la columna
% esp (cm) = Espesor constante de la seccion transversal
% fy (kg/cm2) = Esfuerzo de fluencia del acero
% xn (cm) = Profundidad de fibra neutra
% rc (1/cm) = radio de curvatura de la seccion
%RESULTADOS QUE SE OBTIENEN CON LA FUNCION
% nac (kg) = Resisitencia del perfil a compresion
% nat (kg) = Resisitencia del perfil a traccion
% mac (kg.m) = Capacidad a momento del perfil a compresion
% mat (kg.m) = Capacidad a momento del perfil a traccion
vua=fy; % vua = Esfuerzo ultimo del acero (kg/cm2)
eyd=vua/Es; % eyd = Deformación donde inicia la fluencia del acero
x0a=xn-eyd/rc; % x0a = Altura a la que se produce la deformación eyd(+) (cm)
x0al=x0a;
x0b=xn+eyd/rc; % x0b = Altura a la que se produce la deformación eyd(-) (cm)
x0bl=x0b;
if x0a<0
    x0a=0;
elseif x0a>h
    x0a=h;
end
if x0b>h
    x0b=h;
elseif x0b<0
    x0b=0;
end
syms y a c d
e=rc*(xn-y); % e = Deformacion en la altura "y" conocida
xmed=((d*c)/2+d*(a-c)/6)/(c+0.5*(a-c));
% xmed= distancia al centro de gravedad medida de Xoa/b del triangulo+rectangulo
%Se comprueba el caso 1 con el eje neutro sobre la seccion (xn<0) traccion
% Restriccion: El limite al que llega xn es -2h sobre la seccion
if (xn<0)
    if x0b>=(h-esp) && x0b<=h % (1) y (2)
        alt=-1*abs(b*vua*(h-x0b));
        a2t=-1*abs(int(b*Es*e,(h-esp),x0b));
        a3t=-1*abs(int(2*esp*Es*e,esp,(h-esp)));
        a4t=-1*abs(int(b*Es*e,0,esp));
        nat=alt+a2t+a3t+a4t;
        balt=-1*abs(h/2-(h-x0b)/2);
        y=x0b;
        a=abs(Es*eval(e));
        d=x0b-(h-esp);
        y=(h-esp);
        c=abs(Es*eval(e));
        xmed1=eval(xmed);
        ba2t=-1*abs(x0b-h/2-xmed1);
        a=c;
        d=h-2*esp;
        y=esp;
        c=abs(Es*eval(e));
        xmed1=eval(xmed);
    end
end
```



```
ba3t=-1*abs(h/2-esp-xmed1);
a=c;
d=esp;
y=0;
c=abs(Es*eval(e));
xmed1=eval(xmed);
ba4t=abs(h/2-esp+xmed1);
mat=alt*balt+a2t*ba2t+a3t*ba3t+a4t*ba4t;
elseif x0b>esp && x0b<(h-esp) % (3)
alt=-1*abs(b*vua*esp);
a2t=-1*abs(2*esp*vua*((h-esp)-x0b));
a3t=-1*abs(int(2*esp*Es*e,esp,x0b));
a4t=-1*abs(int(b*Es*e,0,esp));
nat=alt+a2t+a3t+a4t;
balt=-1*abs(h/2-esp/2);
ba2t=-1*abs(h/2-esp-(h-esp-x0b)/2);
a=vua;
d=x0b-esp;
y=esp;
c=abs(Es*eval(e));
xmed1=eval(xmed);
ba3t=(h/2-(x0b-xmed1));
a=c;
d=esp;
y=0;
c=abs(Es*eval(e));
xmed1=eval(xmed);
ba4t=abs(h/2-esp+xmed1);
mat=alt*balt+a2t*ba2t+a3t*ba3t+a4t*ba4t;
elseif x0b>=0 && x0b<=esp % (4) y (5)
alt=-1*abs(b*vua*esp);
a2t=-1*abs(2*esp*vua*(h-2*esp));
a3t=-1*abs(b*vua*(esp-x0b));
a4t=-1*abs(int(b*Es*e,0,x0b));
nat=alt+a2t+a3t+a4t;
balt=-1*abs(h/2-esp/2);
ba2t=0;
ba3t=abs(h/2-esp+(esp-x0b)/2);
y=x0b;
a=abs(Es*eval(e));
d=x0b;
y=0;
c=abs(Es*eval(e));
xmed1=eval(xmed);
ba4t=abs(h/2-x0b+xmed1);
mat=alt*balt+a2t*ba2t+a3t*ba3t+a4t*ba4t;
end
nac=0;
mac=0;
end
% Se comprueba el caso 2 con el eje neutro en el patin superior [0<=xn<=esp]
% Restriccion: Acero no puede fluir dentro del espesor de ningun patin ni a
% traccion ni a compresion
if (xn>=0 && xn<=esp)
%Aporte del acero a Compresión
alc=int(b*Es*e,0,xn);
nac=alc;
balc=(h/2-1/3*xn);
mac=nac*balc;
%Aporte del acero a Tracción
if x0b>=esp && x0b<=(h-esp) % (1)
alt=int(b*Es*e,xn,esp);
a2t=int(2*esp*Es*e,esp,x0b);
a3t=-(2*esp*vua*((h-esp)-x0b));
a4t=-(b*vua*(h-(h-esp)));
nat=alt+a2t+a3t+a4t;
balt=(h/2-(esp-1/3*(esp-xn)));
a=vua;
d=abs(x0b-esp);
y=esp;
c=abs(Es*eval(e));
xmed1=eval(xmed);
ba2t=(h/2-(x0b-xmed1));
ba3t=(h/2-(h-esp-(h-esp-x0b)/2));
```



```
        ba4t=(h/2-(h-(h-(h-esp))/2));
        mat=alt*balc+a2t*ba2t+a3t*ba3t+a4t*ba4t;
    elseif x0b>(h-esp) && x0b<=h % (2)
        alt=int(b*Es*e,xn,esp);
        a2t=int(2*esp*Es*e,esp,(h-esp));
        a3t=int(b*Es*e,(h-esp),x0b);
        a4t=-(b*vua*(h-x0b));
        nat=alt+a2t+a3t+a4t;
        balc=(h/2-(esp-1/3*(esp-xn)));
        y=(h-esp);
        a=abs(Es*eval(e));
        d=abs(h-2*esp);
        y=esp;
        c=abs(Es*eval(e));
        xmedl=eval(xmed);
        ba2t=h/2-((h-esp)-xmedl);
        y=x0b;
        a=abs(Es*eval(e));
        d=abs(x0b-(h-esp));
        y=(h-esp);
        c=abs(Es*eval(e));
        xmedl=eval(xmed);
        ba3t=h/2-(x0b-xmedl);
        ba4t=h/2-(x0b+(h-x0b)/2);
        mat=alt*balc+a2t*ba2t+a3t*ba3t+a4t*ba4t;
    end
end
% Se comprueba el caso 3 con el eje neutro en el alma (esp<xn<(h-esp))
if xn>esp && xn<(h-esp)
    %Aporte del acero a Compresión
    if x0a>=0 && x0a<=esp % (1)
        alc=(b*vua*x0a);
        a2c=int(b*Es*e,x0a,esp);
        a3c=int(2*esp*Es*e,esp,xn);
        nac=alc+a2c+a3c;
        balc=h/2-x0a/2;
        y=x0a;
        a=Es*eval(e);
        d=esp-x0a;
        y=esp;
        c=Es*eval(e);
        xmedl=eval(xmed);
        b2c=h/2-xmedl-x0a;
        b3c=h/2-esp-(xn-esp)/3;
        mac=alc*balc+a2c*b2c+a3c*b3c;
    elseif x0a>esp && x0a<xn % (2)
        alc=(b*vua*esp);
        a2c=(2*esp*vua*(x0a-esp));
        a3c=2*esp*Es*int(e,x0a,xn);
        nac=alc+a2c+a3c;
        balc=h/2-esp/2;
        b2c=h/2-(esp+(x0a-esp)/2);
        b3c=h/2-x0a-1/3*(xn-x0a);
        mac=alc*balc+a2c*b2c+a3c*b3c;
    end
    %Aporte del acero a Tracción
    if x0b<(h-esp) % (1)
        alt=2*esp*Es*int(e,xn,x0b);
        a2t=-(2*esp*vua*((h-esp)-x0b));
        a3t=-(b*vua*(h-(h-esp)));
        nat=alt+a2t+a3t;
        balc=h/2-(x0b-1/3*(x0b-xn));
        ba2t=h/2-(x0b+((h-esp-x0b)/2));
        ba3t=h/2-((h-esp)+(h-(h-esp))/2);
        mat=alt*balc+a2t*ba2t+a3t*ba3t;
    elseif x0b>=(h-esp) && x0b<=h % (2)
        alt=int(2*esp*Es*e,xn,(h-esp));
        a2t=int(b*Es*e,(h-esp),x0b);
        a3t=-(b*vua*(h-x0b));
        nat=alt+a2t+a3t;
        balc=h/2-((h-esp)-1/3*(h-esp-xn));
        y=x0b;
        a=Es*eval(e);
        d=x0b-(h-esp);
```




```
y=h-esp;
c=Es*eval(e);
xmed1=eval(xmed);
ba2t=h/2+xmed1-x0b;
ba3t=h/2-(x0b+(h-x0b)/2);
mat=alt*balt+a2t*ba2t+a3t*ba3t;
end
end
% Se comprueba el caso 4 con el eje neutro en el patin inferior [(h-esp)<=xn<=h]
% Restriccion: Acero no puede fluir dentro del espesor de ningun patin ni a
% traccion ni a compresion
if (xn>=(h-esp) && xn<=h)
    %Aporte del acero a Tracción
    alt=int(b*Es*e,xn,h);
    nat=alt;
    balt=h/2-(h-1/3*(h-xn));
    mat=nat*balt;
    %Aporte del acero a Compresión
    if x0a>esp && x0a<=(h-esp) % (1)
        alc=int(b*Es*e,h-esp,xn);
        a2c=int(2*esp*Es*e,x0a,h-esp);
        a3c=(2*esp*vua*(x0a-esp));
        a4c=(b*vua*esp);
        nac=alc+a2c+a3c+a4c;
        balc=(h/2-((h-esp)+1/3*(xn-(h-esp))));
        a=vua;
        d=abs(h-esp-x0a);
        y=h-esp;
        c=abs(Es*eval(e));
        xmed1=eval(xmed);
        ba2c=(h/2-(x0a+xmed1));
        ba3c=(h/2-x0a+(x0a-esp)/2);
        ba4c=(h/2-esp/2);
        mac=alc*balc+a2c*ba2c+a3c*ba3c+a4c*ba4c;
    elseif x0a>=(0) && x0a<esp % (2)
        alc=int(b*Es*e,h-esp,xn);
        a2c=int(2*esp*Es*e,esp,(h-esp));
        a3c=int(b*Es*e,x0a,esp);
        a4c=(b*vua*(x0a));
        nac=alc+a2c+a3c+a4c;
        balc=(h/2-((h-esp)+1/3*(xn-(h-esp))));
        y=(esp);
        a=abs(Es*eval(e));
        d=abs(h-2*esp);
        y=h-esp;
        c=(Es*eval(e));
        xmed1=eval(xmed);
        ba2c=h/2-esp-xmed1;
        y=x0a;
        a=abs(Es*eval(e));
        d=abs(esp-x0a);
        y=(esp);
        c=abs(Es*eval(e));
        xmed1=eval(xmed);
        ba3c=h/2-x0a-xmed1;
        ba4c=h/2-x0a/2;
        mac=alc*balc+a2c*ba2c+a3c*ba3c+a4c*ba4c;
    end
end
%Se comprueba el caso 5 con el eje neutro bajo la seccion (xn>h) compresion
% Restricciones: El limite al que llega xn es 3h bajo la seccion
if (xn>h)
    if x0a>=(h-esp) && x0a<=h % (1) y (2)
        alc=abs(b*vua*esp);
        a2c=abs(2*esp*vua*(h-2*esp));
        a3c=abs(b*vua*(x0a-(h-esp)));
        a4c=abs(int(b*Es*e,x0a,h));
        nac=alc+a2c+a3c+a4c;
        balc=abs(h/2-esp/2);
        ba2c=0;
        ba3c=-1*abs(h/2-esp+(x0a-(h-esp))/2);
        y=x0a;
        a=abs(Es*eval(e));
        d=h-x0a;
    end
end
```



```
y=h;
c=abs(Es*eval(e));
xmed1=eval(xmed);
ba4c=-1*abs(x0a-h/2+xmed1);
mac=alc*balc+a2c*ba2c+a3c*ba3c+a4c*ba4c ;
elseif x0a>esp && x0a<(h-esp) % (3)
    alc=abs(b*vua*esp);
    a2c=abs(2*esp*vua*(x0a-esp));
    a3c=abs(int(2*esp*Es*e,x0a,(h-esp)));
    a4c=abs(int(b*Es*e,(h-esp),h));
    nac=alc+a2c+a3c+a4c;
    balc=abs(h/2-esp/2);
    ba2c=abs(h/2-esp-(x0a-esp)/2);
    a=vua;
    d=(h-esp)-x0a;
    y=(h-esp);
    c=abs(Es*eval(e));
    xmed1=eval(xmed);
    ba3c=(h/2-(x0a+xmed1));
    a=c;
    d=esp;
    y=h;
    c=abs(Es*eval(e));
    xmed1=eval(xmed);
    ba4c=-1*abs(h/2-esp+xmed1);
    mac=alc*balc+a2c*ba2c+a3c*ba3c+a4c*ba4c ;
elseif x0a>=0 && x0a<=esp % (4) y (5)
    alc=abs(b*vua*x0a);
    a2c=abs(int(b*Es*e,x0a,esp));
    a3c=abs(int(2*esp*Es*e,esp,(h-esp)));
    a4c=abs(int(b*Es*e,(h-esp),h));
    nac=a4c+a3c+a2c+alc;
    balc=abs(h/2-x0a/2);
    y=x0a;
    a=abs(Es*eval(e));
    d=esp-x0a;
    y=esp;
    c=abs(Es*eval(e));
    xmed1=eval(xmed);
    ba2c=abs(h/2-x0a-xmed1);
    a=c;
    d=h-2*esp;
    y=h-esp;
    c=abs(Es*eval(e));
    xmed1=eval(xmed);
    ba3c=abs(h/2-esp-xmed1);
    a=c;
    d=esp;
    y=h;
    c=abs(Es*eval(e));
    xmed1=eval(xmed);
    ba4c=-1*abs(h/2-esp+xmed1);
    mac=alc*balc+a2c*ba2c+a3c*ba3c+a4c*ba4c ;
end
nat=0;
mat=0;
end
mat=double(mat)/100;
mac=double(mac)/100;
nat=double(nat);
nac=double(nac);
end
```

H. Función “dia_itera.m”

```
function [axil,momentos] = dia_itera( b,h,r,as,asl,fc,fy)
es=2000000;
ec=200000;
d=h-r;
cb=0.003*es/(fy+0.003*es)*d
i=1
for c=r:h
    c
    if c==cb
        a=0.85*c;
```



```

        pb=0.85*fc*b*a;
        mn=0.85*fc*b*a*(h/2-a/2)+as1*fy1*(h/2-r)+as*fy2*(d-h/2);
    else if c>cb
        fs=0.003*(d-c)/c*es;
        if fs>=4200
            fs=4200
        else
            end
            a=0.85*c;
            pn=0.85*fc*a*b+as1*fy-as*fs;
            mn=0.85*fc*a*b*(h/2-a/2)+as1*fy*(h/2-r)+as*fs*(d-h/2);
        else
            fs1=0.003*(c-r)/c*es;
            if fs1>=4200
                fs1=4200
            else
                end
                a=0.85*c;
                pn=0.85*fc*a*b+as1*fs1-as*fy;
                mn=0.85*fc*a*b*(h/2-a/2)+as1*fs1*(h/2-r)+as*fy*(d-h/2);
            end
        end
        axil(i,1)=pn;
        momentos(i,1)=mn/100;
        i=i+1
    end
    axil0=0.85*b*d*fc+as*fy+as1*fy;
    momentos0=0;
    axil=[axil;axil0];
    momentos=[momentos;momentos0]
    plot(momentos,axil,'-b')
    axis([0 80000 0 800000])
    hold on
    xlabel('MOMENTO (Kg*cm)')
    ylabel('AXIAL (Kg)')
    title('DIAGRAMA DE INTERACCIÓN SIN CONSIDERAR EFECTOS DE ESBELTEZ (ACI318)')
    legend('DIAGRAMA DE INTERACCIÓN')
end

```

I. Función “interacciona.m”

```

function [Pn,Mn] = interacciona(B,H,t,fy,Es,fc,L,k)
%Esta funcion calcula el diagrama de interacción para columnas rectangulares
%de acero rellenas de hormigón segun el metodo de la distribución de las
%tensiones plásticas (AISC360-10).
%[Poo,Moo,Ppandeo,Pn,Mn]
%DATOS QUE INGRESAN A LA FUNCION
% B (mm) = Ancho de la seccion transversal de la columna
% H (mm) = Peralte de la seccion transversal de la columna
% t (mm) = Espesor constante de la seccion transversal
% fy (kg/cm²) = Esfuerzo de fluencia del acero
% Es (kg/cm²) = Modulo de elasticidad del acero
% fc (kg/cm²) = Resisitencia caracterisitica del hormigon
% L (m) = Longitud de la columna
% k = Factor de reduccion de longitud (Longitud efectiva)
%RESULTADOS QUE SE OBTIENEN CON LA FUNCION
% nac (KN) = Resisitencia del perfil a compresion
% nat (KN) = Resisitencia del perfil a traccion
% mac (KN.m) = Capacidad a momento del perfil a compresion
% mat (KN.m) = Capacidad a momento del perfil a traccion
%1.- Se obtienen las propiedades de la seccion de acero (cm)
As=(2*B*t+2*(H-2*t)*t)/100; %area de acero (cm2)
Is=((B*H^3/12)-((B-2*t)*(H-2*t)^3)/12)/10000; %ineracia acero (cm4)
r=sqrt(Is/As); %radio de giro (cm)
%2.- Se obtienen las propiedades de la seccion de hormigon (cm)
Ac=(B*H)/100-As; % (area de hormigon (cm2)
Ic=((B-2*t)*(H-2*t)^3/12)/10000; %ineracia hormigon (cm4)
C2=0.85;
Ec=15100*sqrt(fc);
%3. Determinar si la columna es esbelta
lim=4.71*sqrt(Es/fy);
lamcol=k*L*100/r;
if lamcol<lim
    disp('Columna intermedia-corta')

```



```
else
    disp('Columna esbelta')
end

%4. Determinar si la seccion es sismicamente compacta, compacta o esbelta
lamda=max(B/t,H/t);
%limites de esbeltez AISC360-10 Tabla I1.1a y Tabla I1.1b
lmsc=1.4*sqrt(Es/fy);
lmp=2.26*sqrt(Es/fy);
lmr=3*sqrt(Es/fy);
lmax=5*sqrt(Es/fy);
if lamda<lmsc
    disp('Sección sismicamente compacta axil')
    Pno=fy*As+C2*fc*Ac; %(I2-9b)
elseif lamda>=lmsc && lamda<lmp
    disp('Sección compacta axil y momento')
    Pno=fy*As+C2*fc*Ac; %(I2-9b)
elseif lamda>=lmp && lamda<lmr
    disp('Sección no compacta axil y momento')
    Pp=fy*As+C2*fc*Ac; %(I2-9b)
    Py=fy*As+0.7*fc*Ac; %(I2-9d)
    Pno=Pp-((Pp-Py)/(lmr-lmp)^2)*(lamda-lmp)^2; %(I2-9c)
elseif lamda>=lmr && lamda<lmax
    disp('Sección esbelta')
    Pp=fy*As+C2*fc*Ac; %(I2-9b)
    Fcr=(9*Es)/(lamda)^2; %(I2-10)
    Py=Fcr*As+0.7*fc*Ac; %(I2-9e)
    Pno=Pp-((Pp-Py)/(lmr-lmp)^2)*(lamda-lmp)^2; %(I2-9c)
else
    disp('La sección ha superado la máxima esbeltez. CAMBIAR')
end
C3=min(0.6+2*(As/(Ac+As)),0.9); %(I2-13)
EIEff=Es*Is+C3*Ec*Ic; %(I2-12)
%Para el cálculo del momento de la columna se usa Comentarios AISC-2010
%FIGURA(a) C-I3.7.
%ap es la ditancia del eje neutro plástico
ap=((2*fy*H*t+0.85*fc*(B-2*t)*t)/(4*t*fy+0.85*fc*(B-2*t)));
%ps=area de acero de cada patin. Superior (compresión) e Inferior
%(tracción)
psi=(B-2*t)*t;
%ac es el area de las dos almas a compresión
ac=2*ap*t;
%at es el area de las dos almas a tracción
at=2*(H-ap)*t;
%ac es el area de concreto a compresion
ah=(B-2*t)*(ap-t);
%La capacidad a momento (Mn) se obtiene haciendo equilibrio en el eje
%neutro plástico, tomando solo el hormigon a compresion
Mn=(psi*fy*(ap-t/2)+ac*fy*ap/2+ah*0.85*fc*(ap-t)/2+at*fy*(H-ap)/2+psi*fy*(H-ap-
t/2))/100000;
%Hasta este punto con Pno y Mno se deterninaron la capacidad de
%la columna, a continuacion se realiza la restricción por pandeo Euler
Pe=pi^2*EIEff/(k*L*100)^2;
if Pno/Pe<=2.25
    Pn=Pno*(0.658^(Pno/Pe)); %(I2-2)
else
    Pn=0.877*Pe; %(I2-3)
end
%Programación para el diagrama de interacción de la columna
w=0;
delta=1;
%di=0;
for i=0:H
    P=0;
    M=0;
    for j=1:H
        di=(delta*j+delta*(j-1))/2;
        if di<i
            fs=-1*fy/100;
            fcl=-1*0.85*fc/100;
        else
            fs=1*fy/100;
            fcl=0;
        end
        if j<=t && j>=0
```



```
        As1=B*delta;
        Ac1=0;
    elseif j*delta<=(H-t) && j*delta>t
        As1=2*t*delta;
        Ac1=(B-2*t)*delta;
    elseif j*delta<=H && j*delta>(H-t)
        As1=B*delta;
        Ac1=0;
    end
    Fs=As1*fs;
    Fc1=Ac1*fc1;
    Pi=Fs+Fc1;
    P=Pi+P;
    Mi=Pi*(di-H/2)/1000;
    M=Mi+M;
end
w=w+1;
Poo(w,1)=-P;
Moo(w,1)=M;
%Se calcula la reducción del diagrama debido al pandeo I2-2, I2-3
%solamente cuando Poo es mayor que 0
if Poo(w,1)>0
    %if Pno/Pe<=2.25
        Ppandeo(w,1)=Poo(w,1)*0.658^(Pno/Pe);

        % Ppandeo(w,1)=0.877*Pe;
    %end
else
    Ppandeo(w,1)=Poo(w,1);
end
end
plot(Moo,Poo,'b',Moo,Ppandeo,'g')
end
```